



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava



GEOMETRIE V POČÍTAČOVÉ GRAFICE

Učební text

Arnošt Šarman

Ostrava 2012

Recenze: Prof. RNDr. Alena Lukasová, CSc.
Ing. Martin Němec, Ph.D.

Název: **GEOMETRIE V POČÍTAČOVÉ GRAFICE**

Autor: Arnošt Šarman

Vydání: první, 2012

Počet stran: 111

Studijní materiály pro studijní obor IT fakulty FEI

Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Název: Personalizace výuky prostřednictvím e-learningu

Číslo: CZ.1.07/2.2.00/07.0339

Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava

Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Arnošt Šarman

© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-2564-9

OBSAH

1. Dělicí poměr, dvojpoměr	5
2. Kuželosečky	14
3. Vlastnosti kuželoseček	22
3.1. Polární vlastnosti kuželoseček	22
3.2. Kvadratické soustavy bodů a přímek.	25
3.3. Svazek a řada kuželoseček	29
3.4. Kolineace, prostor 3D, promítání, kuželosečky.	31
4. Prostor, axiomy, pojmy	37
5. Křivky	49
5.1. Křivky. Parametrická a vektorová rovnice křivky	49
5.2. Explicitní a implicitní rovnice křivky	51
5.3. Transformace parametru křivky	54
5.4. Délka křivky	55
6. Křivky, tečna a oskulační rovina křivky	58
6.1. Tečna křivky	58
6.2. Oskulační rovina křivky	60
7. Oskulační kružnice	69
7.1. Kanonické rovnice křivky	69
7.2. Přírozené rovnice křivky	70
7.3. Styk křivek, oskulační kružnice	73
8. Křivky, evolventy, evoluty	78
8.1. Křivky rovnoběžné	78
8.2. Evolventy, evoluty, cyklické křivky, konchoidální křivky, spirály	81
9. Plochy	86
9.1. Rovnice ploch	86
9.2. Kontravariantní a kovariantní souřadnice vektoru	93
9.3 Tenzory na ploše. Tenzor nultého řádu.	94
9.4 Křivka na ploše.	95
9.5. Tečná rovina, normála plochy	96
9.6. Technické plochy	99
10. První a druhá forma plochy	106

1. DĚLÍCÍ POMĚR, DVOJPOMĚR



Cíl Po prostudování tohoto odstavce se seznámíte

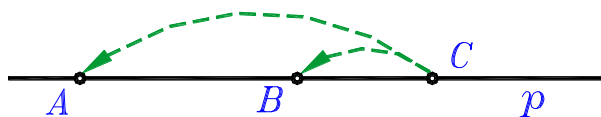
- se základními pojmy potřebné k definování kuželoseček
- jak definovat kuželosečky
- se řešením kuželoseček, které jsou dány obecnými prvky



Výklad

Dělicí poměr

Uvažujeme tři body A, B a C, jejichž nositelka neprochází středem promítání a jejich rovnoběžné průměty A', B' a C'. Promítací přímky AA', BB' a CC' jsou rovnoběžné.



Obr. 1.1

Proto platí $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$

Poměr úseček $\frac{AC}{BC}$ nazveme **dělicím poměrem** tří bodů A, B, C a budeme značit (ABC) :

$$\lambda_C = (ABC) = \pm \frac{AC}{BC}$$

kde znaménko - platí, je-li bod C vnitřním bodem úsečky AB.

Body A, B se nazývají **základní** body. Bod C se nazývá **dělicí** bod. Nevlastnímu dělicímu bodu U_∞ přímky je přidělena $(AB_\infty U) = 1$.

Jestliže budeme nositelku bodů považovat za číselnou osu a body A, B, C budou mít souřadnice a, b, c, potom platí: $(ABC) = \frac{c-a}{c-b} = x$. (I)

Pro číslo x vždy existuje jediný bod c nositelky tak, že platí $(ABC) = x$. Budeme-li vztah (I)

jako rovnici, dostaneme: $c = \frac{a - bx}{1 - x}$

Pro $x \neq 1$ je c souřadnicí jediného bodu. Pro $x = 1$ dostaneme nevlastní bod nositelky. Pro střed úsečky platí $(ABC) = -1$.

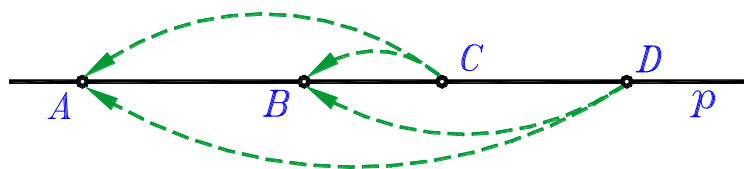
Dvojpoměr

Mějme čtyři různé body A, B, C a D na přímce p . Dvojpoměrem bodů $(ABCD)$ nazveme podíl poměrů (ABC) a (ABD) . Body A a B jsou *základní*. Body C a D jsou *dělicí*. (Vlastní).

Platí tedy:

$$\sigma = (ABC) = \frac{\lambda_c}{\lambda_d}, \quad |\sigma| = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} \quad (\text{II})$$

Vztah má smysl pro **vlastní** dělicí body C a D .



Obr. 1.2

Obdobně jako u poměru i u dvojpoměru lze ukázat, že jediné hodnotě d na přímce, která je nositelkou bodů A, B, C a D existuje jediný dělicí bod D .

Z (II) lze psát:

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a) \cdot (d-b)}{(c-b) \cdot (d-a)}$$

Označíme $(ABCD) = x$.

Potom tedy $d = \frac{ax(c-b) - b(c-a)}{x(c-b) - (c-a)}$. Pro $x \neq \frac{c-a}{c-b}$ je souřadnicí d určen jediný bod na

přímce p . Pro $x = \frac{c-a}{c-b}$ dostaneme nevlastní bod na přímce p .

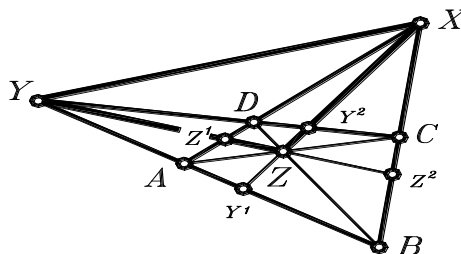
Vlastnosti dvojpoměru

Věta Pappova

Je-li dvojpoměr $(ABCD) = \delta \neq 0$, potom $(ABDC) = (BACD) = \frac{1}{|\sigma|}$.

Harmonickou čtveřinu bodů tvoří body, jejichž dvojpoměr je roven -1 .

$(ABCD) = -1 \Rightarrow \Delta$ body A, B, C a D tvoří harmonickou čtveřinu bodů.



Obr. 1.4

Harmonickou čtveřinu bodů můžeme snadno konstruovat pomocí tzv. *úplného čtyřrohu*.

Mějme v rovině čtyři různé body A, B, C a D, kde žádné tři neleží na jedné přímce (viz obrázek 1.4). Spojením vrcholů (resp. jejich prodloužením) dostaneme průsečíky X, Y a Z, které tvoří tzv. *diagonální trojúhelník*, kde body X, Y a Z se nazývají *diagonální vrcholy*. Sestrojíme průsečíky strany diagonálního trojúhelníka se stranami čtyřrohu.

Na obrázku 1.4 je označeno Y^1 a Y^2 .

Ukážeme, že platí:

$$(ABYY^1) = (CDYY^2) = -1. \text{ Označíme } (CDYY^2) = \delta. \quad (\text{III})$$

Promítneme-li body C, D, Y, Y^2 z bodu Z na spojnici AB, dostaneme (dle Pappovy věty) rovnost:

$$(CDYY^1) = (BAYY^2) = \delta$$

Jestliže tytéž body promítneme z bodu X na spojnici AB, dostaneme:

$$(CDYY^2) = (BAYY^1) = \frac{1}{(ABYY^1)} = \frac{1}{\sigma}. \quad (\text{IV})$$

Z (III) a (IV) plyne, že $\sigma = 1/\sigma$, tedy $\sigma^2 = 1$. Řešením této rovnice tedy je $\sigma = -1$.

Řešení $\sigma = +1$ nevyhovuje, protože body Y a 1Y jsou různé.

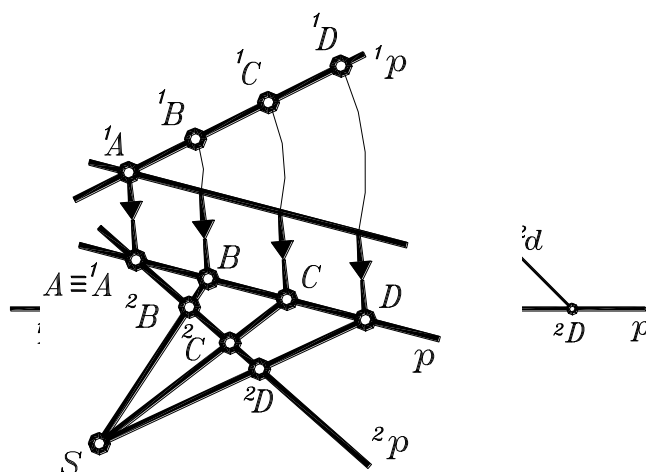
Na základě Pappovy věty můžeme definovat dvojpoměr čtyř přímek a , b , c a d , jednoho svazku tak, že jsou protnuty libovolnou přímkou p (nenáležící svazku) právě v bodech A, B, C a D. Potom dvojpoměr přímek a , b , c a d je rovný dvojpoměru bodů A, B, C a D. Obdobně můžeme definovat dvojpoměr čtyř rovin α , β , γ a δ patřících jednomu svazku rovin.

Doporučená animace: 1b Harmonická čtveřina bodu

Projektivní příbuznost dvou útvarů nastává tehdy, jestliže jednotlivé prvky útvarů jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny a dvojpoměr sobě odpovídajících čveríc bodů je stejný.

Projektivní příbuznost je dána třemi různými páry sobě odpovídajících bodů.

Perspektivní příbuznost je příbuznost dvou projektivních útvarů, které mají samodružný bod.



Obr. 1.5

Na obrázku 1.5

řady 1p a p jsou projektivní;

řady 2p a p jsou perspektivní.

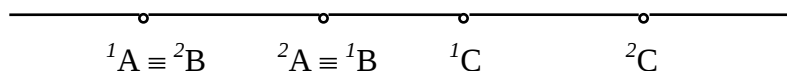
Na obrázku 6 je na nositelce p ${}^1A, {}^1B, {}^1C, {}^1D, \dots$ Mimo tuto nositelku p je zvolen bod L . Spojnice ${}^1A, {}^1B, {}^1C, {}^1D, \dots$ s bodem L vzniknou přímky ${}^1a, {}^1b, {}^1c, {}^1d, \dots$ Jestliže tyto přímky ${}^1a, {}^1b, {}^1c, {}^1d, \dots$ otočíme okolo bodu L o konstantní úhel (na př. 90%) do přímek ${}^2a, {}^2b, {}^2c, {}^2d, \dots$, které protnou nositelku p v bodech ${}^2A, {}^2B, {}^2C, {}^2D, \dots$ Dle Pappovy věty platí $({}^1A {}^1B {}^1C {}^1D) = ({}^2A {}^2B {}^2C {}^2D)$.

Platí věta: Mimo identickou příbuznost existují tři typy projektivní příbuznosti. A to se dvěma samodružnými body - *hyperbolická* ; s jedním samodružným bodem - *parabolická* a bez samodružných bodů *eliptická*.

Doporučená animace: 1c Perspektivní příbuznost.

Involuce je zvláštní případ projektivní příbuznosti dvou bodových řad, kdy nositelky těchto řad jsou totožné a dva páry sobě odpovídajících si bodů tvoří tzv. *vratnou dvojinu*

$${}^1A \equiv {}^2B, {}^2A \equiv {}^1B.$$



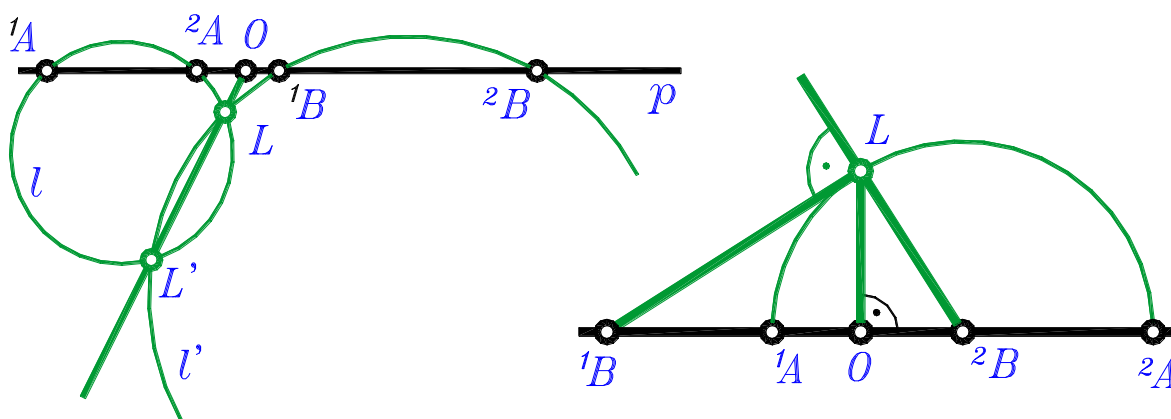
Dále platí věty: (uvedeme bez důkazů)

Jestliže dvě soumísné projektivní řady mají jednu vratnou dvojinu, jsou všechny dvojiny sobě odpovídajících si bodů vratné dvojiny. (V)

V hyperbolické involuci tvoří každý pár sobě odpovídajících si bodů se samodružnými body harmonickou čtveřinu. (VI)

V eliptické involuci se páry odpovídajících bodů oddělují. (VII)

Bod, který odpovídá nevlastnímu bodu nositelky označujeme jako *střed involuce*. (VIII)



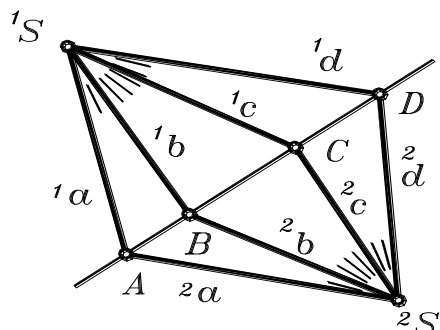
Obr. 1.7

Lze odvodit $OA \cdot OA' = OL \cdot OL' = OB \cdot OB'$ - hyperbolická

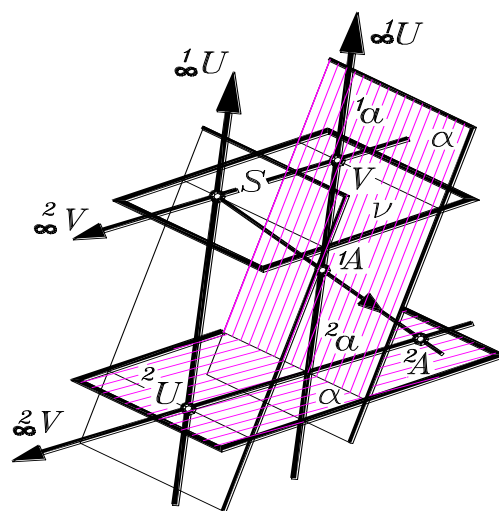
$OA \cdot OA' = k$ - eliptická

Mezi přímkami dvou svazků je projektivní příbuznost, jestliže si přímky odpovídají jednoznačně a dvojpoměry odpovídajících prvků - přímek jsou stejné. (IX)

Doporučená animace: 1d Samodružné body a střed kolineace



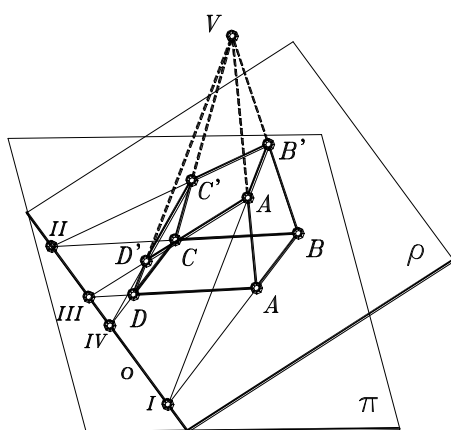
Obr.1.8



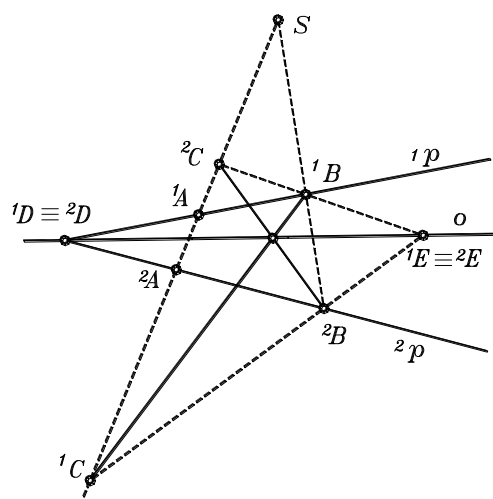
Obr. 1.9

Perspektivní kolineace je geometrická příbuznost dvou polí v rovině, kde bodu odpovídá bod, přímka přímce a bod na přímce opět odpovídající bod na odpovídající přímce. Spojnice odpovídajících bodů procházejí jediným bodem tzv. *středem kolineace*.

Střed kolineace odpovídá sám sobě - je silně samodružný, je to střed svazku přímek - **slabě samodružných**. Na těchto slabě samodružných přímkách leží sobě odpovídající kolineární body. Průsečíky svazku s osou kolineace jsou body **silně samodružné** - "tvoří" osu kolineace. Přímka jednoho pole, která odpovídá nevlastní přímce pole druhého se nazývá *úběžnice*.



Obr. 1.10

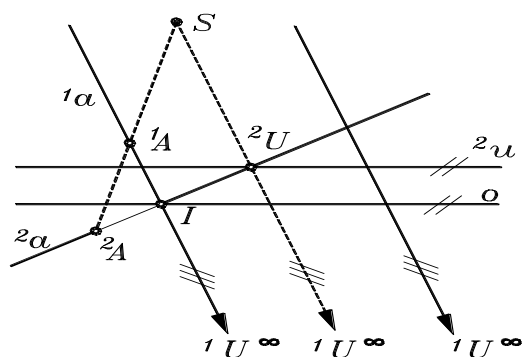


Obr.1.11

Středová kolineace je dána středem S , osou o a párem kolineárních bodů A, A' . ($S C A A'$.)
Sestrojte a) k bodu B bod B' . K bodu C' bod C .

b) k nevlastnímu bodu jednoho pole odpovídající bod.

c) k přímce odpovídající přímkou.



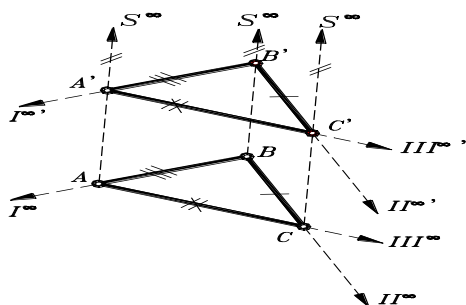
Obr. 1.12

Kolineace s nevlastní osou a nevlastním středem je **posunutí** (*translace*) (obrázek 1.13).

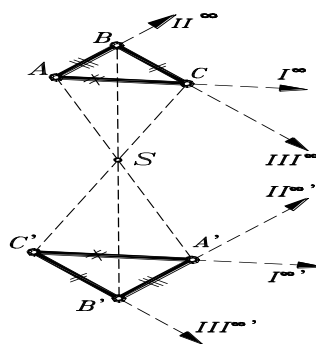
Kolineace s nevlastní osou, vlastní střed je **stejnolehlost** (*homotetie*) (obrázek 1.14).

Kolineace s vlastní osou a nevlastním středem je **osová afinita**. (Obrázek 1.15.)

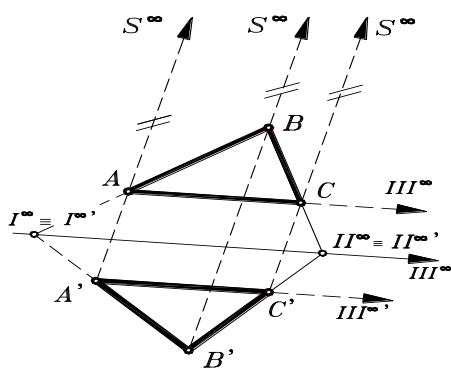
Jestliže střed leží na ose, jde o *elaci*.



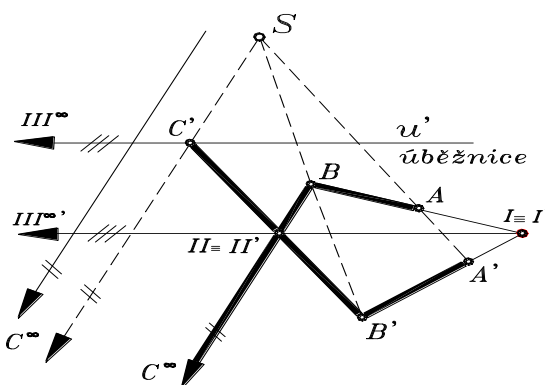
Obr. 1.13



Obr. 1.14



Obr. 1.15



Obr. 1.16



Ootázky 1.

1. Vysvětlete pojmy poměr, dvojpoměr. Vlastnosti dvojpoměru. Harmonická čtveřina bodů.
2. Úplný čtyřroh, čtyrstěn. Význam a použití.
3. Projektivní a perspektivní útvary.
4. Kolineace, afinita. Vlastnosti a použití.

2. KUŽELOSEČKY



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- základní pojmy potřebné k definování kuželoseček
- definovat kuželosečky
- řešit příklady kuželoseček, které jsou dány obecnými prvky



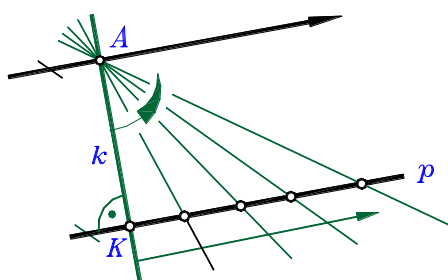
Výklad

Pojmy

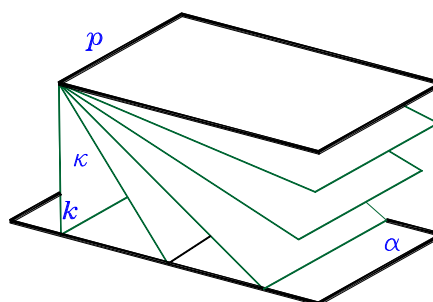
Nevlastní prvky. Nevlastní bod, nevlastní přímka

V euklidovské geometrii jsou definovány přímky a roviny bez tzv. nevlastních prvků.

Příklad: dvě rovnoběžné přímky nemají společný bod.



Obr. 2.1



Obr. 2.2

Na obrázku 2.1 je dána přímka p a mimo ni bod A . Jestliže z bodu A spustíme kolmici na přímku p dostaneme bod K . Bude-li se bod K pohybovat po přímce p , úhel přímek k a p se bude zmenšovat. V okamžiku, kdy se úhel těchto přímek bude rovnat nule, stane se bod K **nevlastním bodem** přímky p . Říkáme (v euklidovské geometrii), že přímky p a k jsou rovnoběžné.

Obdobně je tomu u rovin (obr. 2.2). Dvě rovnoběžné roviny mají společnou jednu nevlastní přímku.

Lze definovat vlastnosti nevlastních prvků:

- Každá vlastní přímka obsahuje jediný nevlastní bod.

- Každá vlastní rovina obsahuje jedinou nevlastní přímku.
- Nevlastní bod A^∞ je incidentní s nevlastní přímkou p^∞ tehdy a jen tehdy, jestliže existuje taková vlastní přímka určující nevlastní bod A^∞ , která je v rovině určující nevlastní přímkou p^∞ .
- Nevlastní rovina je incidentní se všemi nevlastními body a přímkami a pouze s nimi.
- Dva vlastní prvky jsou rovnoběžné tehdy a jen tehdy, mají-li společný nevlastní prvek.
- Prostor, který obsahuje vedle vlastních bodů, přímek a rovin ještě nevlastní body, přímky a roviny se nazývá **rozšířený euklidovský prostor**.

Dualita

V rozšířeném euklidovském prostoru platí tzv. **princip duality**, a to

- 1) dualita v rovině,
- 2) dualita v prostoru.

Platí: Jestliže v pravdivé větě, která obsahuje kromě pojmu *bod*, *přímka*, *rovina* a *incidence* logické a aritmetické pojmy, nahradíme pojmy bod, přímka a rovina v pořadí pojmy rovina, přímka a bod, dostaneme opět pravdivou větu. Tj. dualita v prostoru.

Při rovinné dualitě nahrazujeme pojem *bod* pojmem *přímka* a pojem *přímka* pojmem *bod*.

Příklad: Dva různé body určují jedinou přímku.

Duálně. Dvě různé přímky (v rovině) určují jediný bod.

Příklad: Dva různé body jsou incidentní a jedinou přímkou.

Duálně. Dvě různé roviny jsou incidentní s jedinou přímkou.

Příklad: Tři různé body určují rovinu.

Duálně. Tři různé (vzájemně nerovnoběžné) roviny určují bod.

Kuželosečky

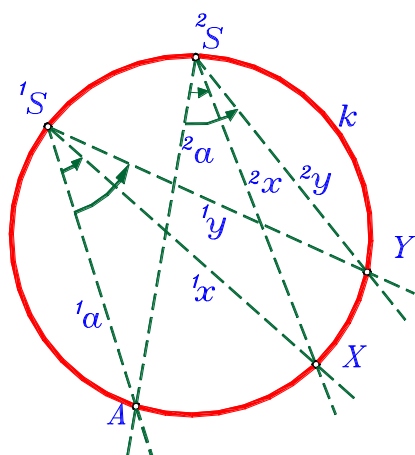
Definice: Bodová kuželosečka je geometrické místo průsečíků sobě odpovídajících přímek, které patří dvěma projektivním svazkům jedné roviny. (2.1)

Duálně.

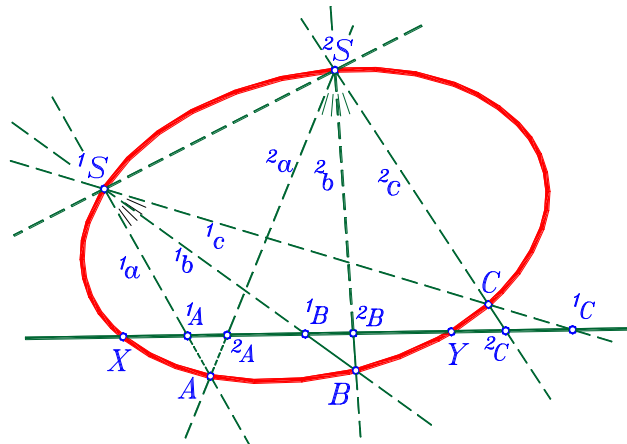
Přímková kuželosečka je geometrické místo přímek spojující odpovídající si body dvou projektivních bodových řad v rovině. (Podle rovinné duality.)

Pod pojmem přímková kuželosečka (i obecná křivka) si představujeme množinu tečen nějaké kuželosečky (křivky).

Protože nás nezajímají složené - degenerované - kuželosečky (přímka, rovnoběžky, různoběžky a bod) budeme předpokládat, že svazky jsou nesoumísné a projektivní



Obr. 2.3



Obr. 2.4

(neperspektivní). Resp. bodové řady jsou nesoumísné a neperspektivní.

Jsou dány dva nesoumísné projektivní svazky $^1S(^1a, ^1b, ^1c)$ a $^2S(^2a, ^2b, ^2c)$, potom odpovídající si přímky $^1a ^2a$, $^1b ^2b$ a $^1c ^2c$ se protínají v bodech A , B a C , které společně se středy svazků 1S a 2S leží na kuželosečce k . (Obr. 2.3, 2.4) Jestliže projektivní svazky $^1S(^1a, ^1b, ^1c)$ a $^2S(^2a, ^2b, ^2c)$ protneme přímkou p (neprocházející středy 1S a 2S), vytvoří tyto svazky na přímce p dvě soumísné projektivní řady $^1s(^1A, ^1B, ^1C)$ a $^2s(^2A, ^2B, ^2C)$. (Obr. 2.4) Z projektivních vlastností plyne, že řady $^1s(^1A, ^1B, ^1C)$ a $^2s(^2A, ^2B, ^2C)$ mají samodružné body. Z toho plyne, že kuželosečka má s přímkou maximálně dva společné body - průsečíky. Středy svazku 1S a 2S patří k bodům kuželosečky. Tyto body **nejdou** nijak zvláštní vzhledem k ostatním bodům kuželosečky.

Lze odvodit větu (Chalossovu):

Body bodové kuželosečky se promítají ze dvou různých bodů této kuželosečky jako projektivní přímkové svazky

(2.2)

Duálně

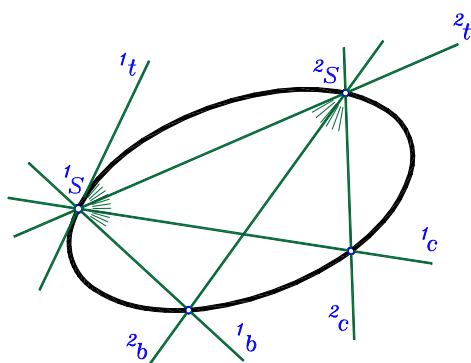
- Přímky přímkové kuželosečky protínají její dvě různé přímky ve dvou projektivních řadách.

Dále lze ukázat:

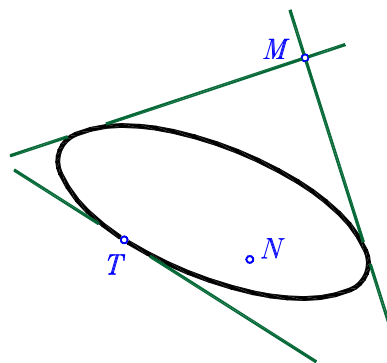
- Každým bodem kuželosečky prochází právě **jedna** tečna kuželosečky.

Duálně

- Na každé přímce přímkové kuželosečky je právě jeden dotykový bod.



Obr. 2.5



Obr. 2.6

Na obr. 2.5 je kuželosečka tvořená svazky $^1S(^1b, ^1c)$ a $^2S(^2b, ^2c)$. Přímce 2t patřící svazku 2S odpovídá přímka 1t svazku 1S . Lze ukázat, že přímka 1t je tečnou kuželosečky.

Pojem vnitřní resp. vnější bod kuželosečky:

- Vnější bod kuželosečky je každý bod, z něhož lze vést dvě různé tečny.

Na obr. 2.6 jde o bod M .

- Jestliže bodem lze vést jednu tečnu bodové kuželosečky, je daný bod právě bodem kuželosečky. Na obr. 2.6 jde o bod T .

- Jestliže daným bodem nelze vést žádnou reálnou tečnu, jde o bod vnitřní.

Na obrázku 2.6 jde o bod N .

Z dosavadního plyne:

Kuželosečka je dána **pěti** prvky. Šestý prvek je vázaný na právě pěti prvcích dříve zadaných.

O vztahu této vazby hovoří věta **Pascalova**.

Nutná a postačující podmínka, aby šest bodů $1, 2, 3, 4, 5, 6$ z nichž žádné tři neleží na jedné přímce patřilo jedné kuželosečce je, aby průsečíky spojnic $I = \{[12][45]\}$, $II = \{[23][56]\}$ a $III = \{[34][61]\}$ ležely na přímce (Pascalově).

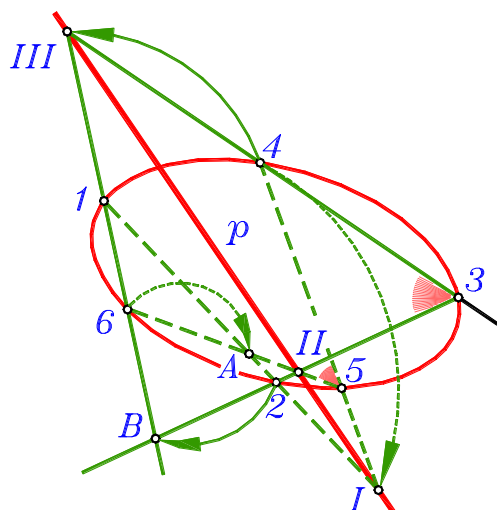
Duálně

Nutná a postačující podmínka, aby šest přímek $1, 2, 3, 4, 5, 6$, kde žádné tři neprocházejí jedním bodem, byly tečnami jedné kuželosečky je, aby spojnice průsečíků $[12]$ a $[45]$, $[23]$ a $[56]$, $[34]$ a $[61]$ procházeli jedním (Brianchonovým) bodem. (**Brianchonova věta**)

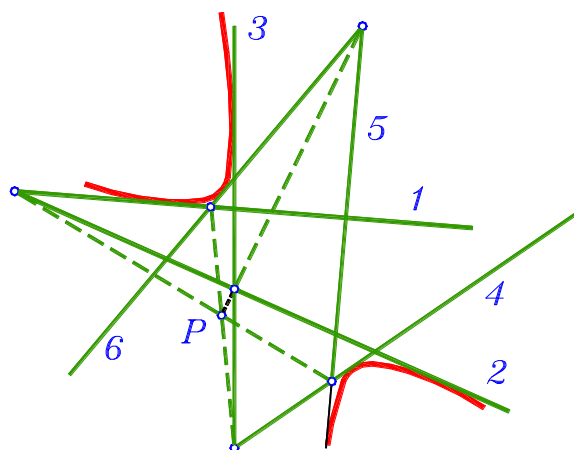
Důkaz. (Obr. 2.7)

Předpokládejme, že body $1, 2, 3, 4, 5$ a 6 patří jedné kuželosečce.

Ať bod $A \equiv \{[12],[56]\}$ a bod $B \equiv \{[23],[61]\}$. Body 1, 2, 4 a 6 promítneme z bodu 3 na spojnici $[16]$ a z bodu 5 na spojnici $[12]$. Dle (2.2) (věta Chalessova) musí být dvojpoměry čtveřic bodů stejné.



Obr. 2.7



Obr. 2.8

Tedy:

$$(1BIII6) = (12IA)$$

Z vlastnosti o perspektivitě řad plyne, že spojnice odpovídajících si perspektivních bodů procházejí jedním bodem - středem. V našem případě je to pro spojnice bodů $[B2]$, $[III I]$ a $[6A]$ bod II , který leží na přímce $p \equiv [III, I]$.

Protože $[B2] \equiv [23]$, $[III I] \equiv p$, $[6A] \equiv [56]$, tak body $I \equiv \{[12][45]\}$, $II \equiv \{[23][56]\}$, $III \equiv \{[34][61]\}$ leží na jedné přímce.

A naopak, jestliže mezi body 1, 2, 3, 4, 5 a 6 platí vztah uvedený ve větě, spojnice $[A6]$, $[B2]$, $[I III]$ procházejí jedním bodem II , potom tedy $(1BIII6) = (12IA)$.

Z toho tedy plyne, že uspořádaná čtveřice přímek, kterými se promítají body 1, 2, 4, 6 z bodů 3 a 5, mají stejný dvojpoměr, a tedy všech 6 bodů 1, 2, 3, 4, 5 a 6 leží na jedné kuželosečce.

Doporučená animace: 2a Pascalova veta, 2b Pascalova – Brianchonova veta

Příklad použití uvedených vět pro konstrukci kuželoseček.

Příklad 1. Kuželosečka je dána pěti body A, B, C, D, E . Žádné tři neleží na přímce.

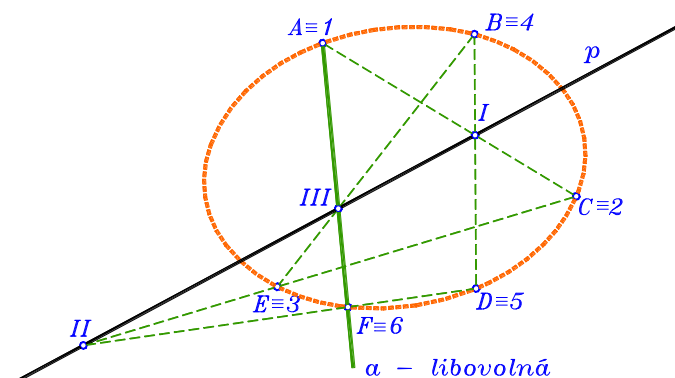
Určete a) další bod kuželosečky;

b) tečnu v libovolném bodě z nich;

Na obrázku 2.9 je řešen další bod kuželosečky.

Řešení: Bodem A vedeme libovolnou přímku a na které budeme určovat další - šestý bod kuželosečky. Očíslování provedeme tak, že očekávaný bod číslo 6 bude na právě zvolené přímce a . Body A, B, C, D a E očíslováme 1, 4, 2, 5 a 3. Spojnici bodů $[61]$ známe, umíme tedy najít Pascalovu přímku p i bez znalosti bodu 6.

Určíme dvojice protějších stran šestiúhelníka 123456 vepsaného do kuželosečky.



Obr. 9

Jsou to $[12][45]$, $[23][56]$, $[34][61]$. Bod I přímky p je průsečík $[12] \cap [45]$.

Bod III přímky p je $[34] \cap [61]$,

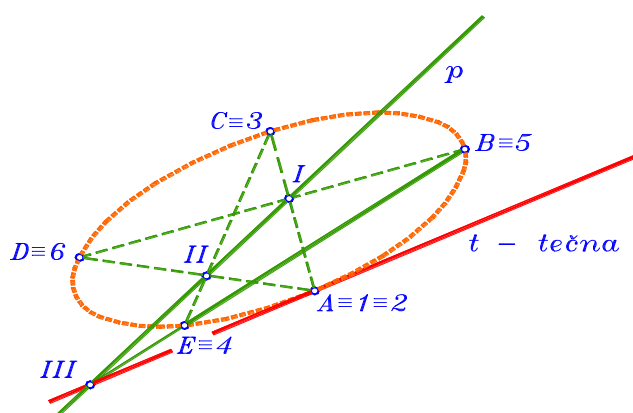
kde $[61]$ je přímka a .

Takže $p \perp I \cap III$. Bod $II \perp p \cap [23]$.

Výsledný bod $F \perp 6 \perp a \cap [5 II]$.

Doporučená animace: 2c Konstrukce eliptického oblouku $e(tA, tB, C)$

Na obrázku 10 je tečna kuželosečky v daném bodě.



Obr. 10

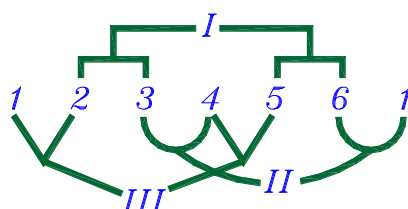
Postup od předešlého se liší pouze jiným aplikováním Pascalovy věty.

Do bodu, v němž hledáme tečnu, položíme dva sousední body ze šesti bodů, které určují Pascalovu přímku. Tím jsme do jednoho reálného bodu kuželosečky položili dva "různé" body. Jejich spojnice je tedy tečnou kuželosečky v daném bodě.

Řešení: Body A, B, C, D a E očíslováme $A \equiv 1, B \equiv 5, C \equiv 3, D \equiv 6, E \equiv 4$.

Pascalova přímka p je tedy určena body I a II . Bod III určíme jako průsečík přímky p a spojnice $[45]$. Spojnice $[12]$ jde do bodu III - je tedy tečnou v bodě A .

Obrázek 2.11 je seznamem vrcholů šestiúhelníka, který slouží jako pomůcka pro označení průsečíků protějších stran či spojnic protějších vrcholů šestiúhelníka vepsaného či opsaného kuželosečce.



Obr. 2.11

Doporučené animace: 2d Kuželosečka dána pěti body $k(A, B, C, D, E)$

2e Tecna paraboly 3 body a smer osy v bode A

2f Tecna paraboly 3 body a smer osy v koncovem bode C.



Shrnutí pojmů

1. Rozšířený euklidovský prostor – prostor rozšířený o nevlastní prvky.
2. Princip duality.
3. Definice kuželoseček a vlastnosti bodů a tečen kuželoseček.
4. Pascalova a Brianchonova věta.



Otázky 2.

1. Projektivní definice kuželoseček. Bodová, tečnová.
2. Pascalova přímka. Její význam a aplikace při řešení úloh kuželoseček.

**Úlohy k řešení 2.**

1. Kuželosečka je dána pěti body A, B, C, D a E . Vykreslete oblouk kuželosečky od bodu A do bodu B .
2. Kuželosečka je dána pěti body A, B, C, D a E . Dále je dána úsečka KL . Vykreslete oblouk kuželosečky, který prochází bodem A a je omezen úsečkou KL .

3. VLASTNOSTI KUŽELOSEČEK



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- vlastnosti kuželoseček, které jsou potřebné pro řešení os kuželoseček daných obecnými prvky,
- řešit příklady kuželoseček, které jsou neřešitelné nebo velice obtíže řešitelné jinými metodami



Výklad

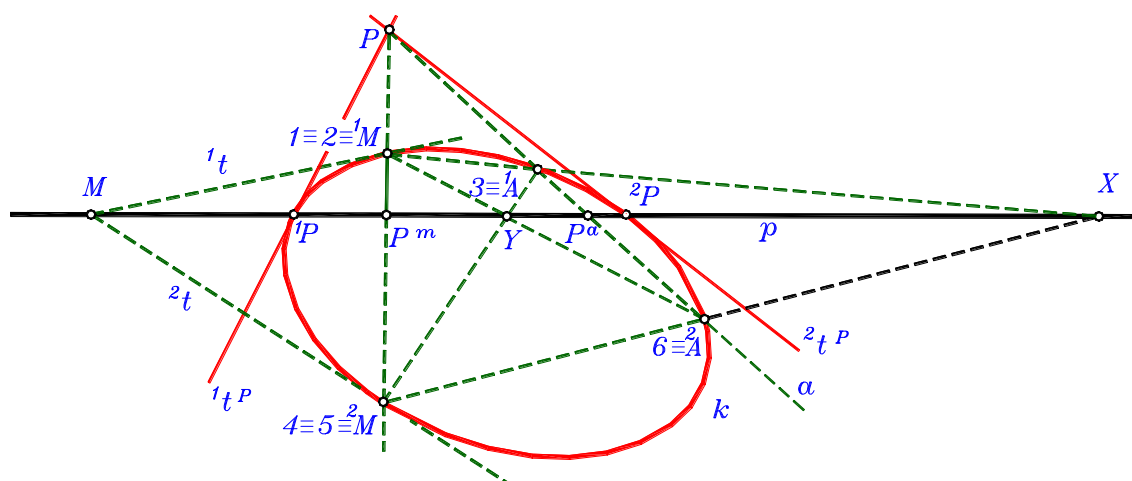
3.1 Polární vlastnosti kuželoseček

Zvolíme libovolný bod P , který neleží na kuželosečce k (obr. 3.1). Tímto bodem sestrojíme libovolnou přímku a tak, aby protínala kuželosečku v bodech 1A a 2A . Na přímce a sestrojíme bod P^a , pro který bude platit

$$(P P^a ^1A ^2A) = -1,$$

potom lze ukázat, že platí věta:

Všechny body P^a leží na jedné přímce p , kterou nazveme **polárou** bodu P vzhledem ke kuželosečce k . Bod P bude **pólem** přímky p vzhledem ke kuželosečce k .



Obr. 3.1

Konstrukce a důkaz věty.

1. Bodem P vedeme libovolnou přímku m , která protne kuželosečku v bodech 1M a 2M .
2. V těchto průsečících 1M a 2M sestrojíme tečny 1t a 2t .
3. Průsečík tečen 1t a 2t označíme jako bod M .
4. Sestrojíme diagonální vrcholy X a Y čtyřrohu $^1M^2M^1A^2A$.

Třetím diagonálním vrcholem čtyřrohu je bod P .

5. Označíme:

$$^1M \equiv 1 \equiv 2, ^2M \equiv 4 \equiv 5, ^1A \equiv 3, ^2A \equiv 6.$$

Dle Pascalovy věty platí, že body

$$M \equiv I, X \equiv II \text{ a } Y \equiv III \dots\dots\dots \text{ leží na přímce } p.$$

Z vlastností úplného čtyřrohu $^1M^2M^1A^2A$ plyne:

$$(^1M^2M^1A^2A P P^m) = (^1A^2A^1M^2M P P^a) = -1.$$

Přímka p je určena body M a P^m a není

tedy závislá na volbě přímky a .

Jde tedy o hledanou **poláru** p bodu P .

Jestliže přímka p protíná kuželosečku k v

bodech 1P a 2P , potom lze ukázat, že

tečny $^1t^P$ a $^2t^P$ kuželosečky v bodech

1P a 2P procházejí bodem P .

Lze dále ukázat:

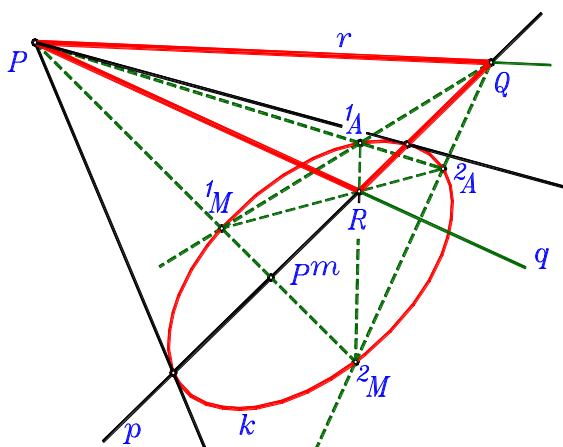
Polára bodu P prochází spojnicí dotkových

bodů tečen vedených ke kuželosečce z bodu P .

Jestliže bod - pól - leží na kuželosečce, potom polára tohoto bodu je tečna kuželosečky s bodem dotyku právě v tomto bodě.

Jestliže bod Q leží na poláře p bodu P kuželosečky k , potom polára q bodu Q prochází bodem P .

Na obrázku 3.2 je dán trojúhelník PQR tak, že každá strana tohoto trojúhelníka je polárou protějšího vrcholu. Takovýto trojúhelník se nazývá *polárním trojúhelníkem* kuželosečky k .



Obr. 3.2

Klasifikaci kuželoseček lze provádět z hlediska vztahu kuželosečky a nevlastní přímky roviny.

Kuželosečka	počet nevlastních bodů	
elipsa	0	
parabola	1	... směr osy paraboly
hyperbola	2	... směry asymptot

Pól nevlastní přímky je **středem** kuželosečky.

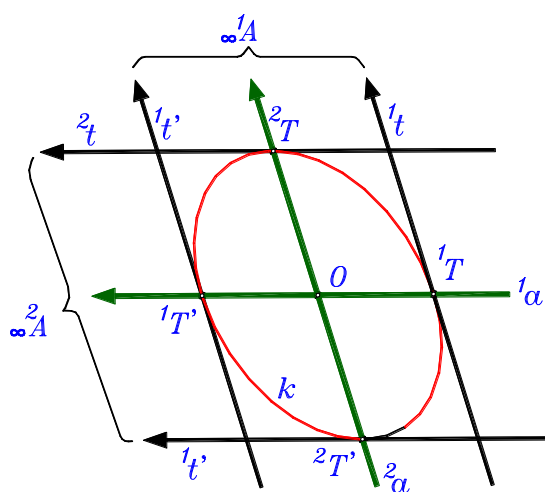
Průměr kuželosečky - každá přímka procházející jejím středem.

Sdružené průměry kuželosečky nazveme dvě strany polárního trojúhelníka, kde třetí strana tohoto trojúhelníka je **nevlastní** přímkou. (Obr. 3.3)

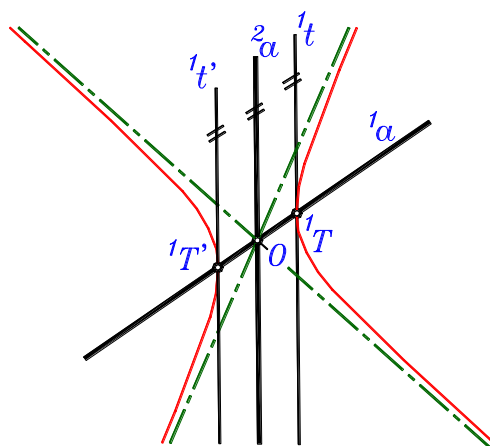
Jinak: Tečny v koncových bodech průměru jsou rovnoběžné se sdruženým průměrem.

Pravoúhlý pár sdružených průměru tvoří osy kuželosečky.

Existují konstrukce os ze sdružených průměrů. Má význam pro konstrukci elipsy pomocí kruhových oblouků.



Obr. 3.3



Obr. 3.4

Páry sdružených průměrů kuželoseček tvoří involuci. U elipsy jde o eliptickou, u paraboly - parabolickou a hyperboly hyperbolickou involuci. U hyperboly tedy existují samodružné prvky a tím jsou *asymptoty hyperboly*. (Obr. 3.4)

Doporučená animace: 2h Konstrukce os elipsy - Rytzova konstrukce.

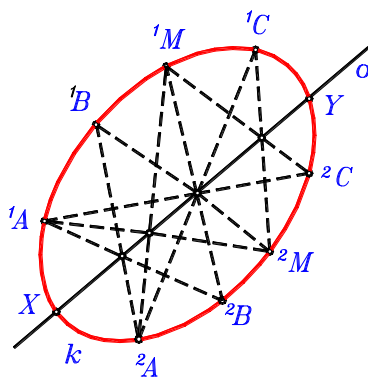
3.2 Kvadratické soustavy bodů a přímek

Kvadratická soustava bodů je soustava projektivních útvarů, kde nositelkou těchto útvarů je kuželosečka.

Na obrázku 3.5 jsou na nositelce - elipse - dvě projektivní řady $^1A, ^1B, ^1C, \dots, ^2A, ^2B, ^2C, \dots$, které vznikly promítnutím bodové řady na jedné nositelce a dvěma projektivními svazky se středy 1M a 2M ležícími na kuželosečce k . Průsečíky X, Y přímky o s kuželosečkou jsou samodružnými v projektivitě na k . Na přímce o se dále protínají odpovídající si paprsky.

Na př. $^1A ^2B * ^2A ^1B; ^2A ^1M * ^1A ^2M; ^2A ^1C * ^1A ^2C \dots$

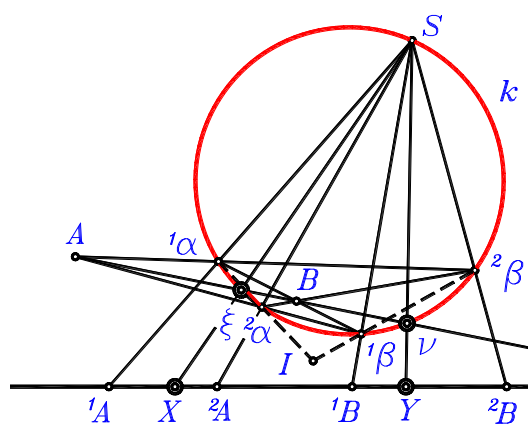
Přímka o se nazývá osa projektivity.



Obr. 3.5

Příklad 1.

Na obrázku 3.6 jsou dány na přímce a dva páry bodů v hyperbolické involuci. Najděte jejich samodružné body X a Y .



Obr. 3.6

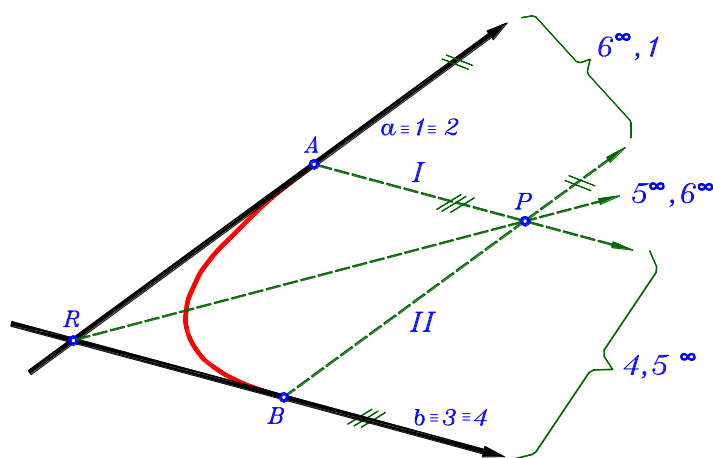
Řešení:

1. Zvolíme libovolnou kružnici k a na ní bod S .
2. Z bodu S promítneme body $^1A, ^2A, ^1B, ^2B$ na kružnici k do bodů $^1\alpha, ^2\alpha, ^1\beta, ^2\beta$.
3. Body $^1\alpha, ^2\alpha, ^1\beta$ a $^2\beta$ tvoří čtyřroh. Polární trojúhelník je tvořen body A, B a I .
Kde $A \equiv [^1\alpha ^2\beta, ^2\alpha ^1\beta]$, $B \equiv [^2\alpha ^2\beta, ^1\alpha ^1\beta]$ a $I \equiv [^1\alpha ^2\alpha, ^1\beta ^2\beta]$.
4. Body $[AB] = l$. Přímka l , určená body A, B protne kružnici k v bodech ξ a η .
5. Tyto body ξ a η promítneme z bodu S na přímku a do bodů X a Y , které jsou hledané samodružné body.

Příklad 2.

Parabola p je dána dvěma tečnami s body dotyku $p(aA, bB)$. Určete ohnisko F paraboly.

- a) 5-tý prvek - nevlastní přímka roviny ... tečna paraboly
- b) Bod dotyku na této nevlastní tečně ... směr osy paraboly



Obr. 3.7

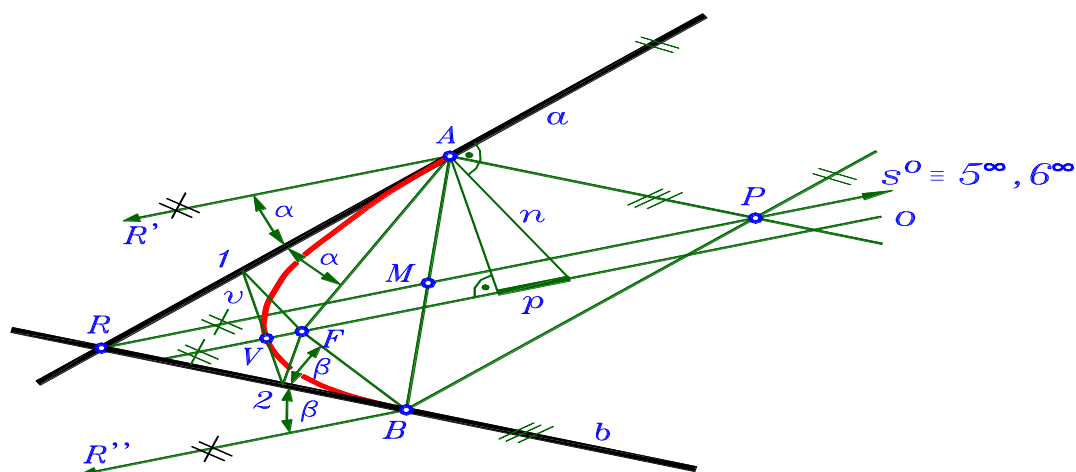
Brianchonova věta:

Označíme: $a \equiv 1 \equiv 2$, $b \equiv 3 \equiv 4$. Nevlastní tečně přidělíme číslo $5, 6^\infty$.

Brianchonův bod P najdeme jako průsečík spojnic I a II , kde

$$I \equiv [12, 45^\infty], II \equiv [34, 6^\infty 1]. \Rightarrow P \equiv (I * II)$$

RP ... směr osy paraboly R ... průsečík tečen 2 a 3 $\Rightarrow$



Obr. 3.8

RP prochází průsečíkem tečen $5,6^\infty$

Řešení: (Obr. 3.8)

$RAPB$... rovnoběžník $\Rightarrow M$ je střed úsečky $AB \Rightarrow RM$... směr osy s^o paraboly

1. M ... střed úsečky AB ($MA = MB$)

2. $A \in AR' \parallel MR$ a $B \in BR'' \parallel MR$

AR' a BR'' ... průvodiče bodů A', B'

3. F ... ohnisko – průsečík souměrných přímek k průvodičům podle příslušných tečen

FA ... souměrné dle tečny a k průvodiči AR'

FB ... souměrné dle tečny b k průvodiči BR'

4. $F \in o \parallel RM$... o ... osa paraboly

5. Konstrukce vrcholu V paraboly

Paty kolmic, které procházejí ohniskem paraboly, leží na vrcholové tečně paraboly.

$\overline{F1} \perp a$, $\overline{F2} \perp b \Rightarrow (12 * o) \equiv V$... vrchol paraboly (Ohniskové vlastnosti)

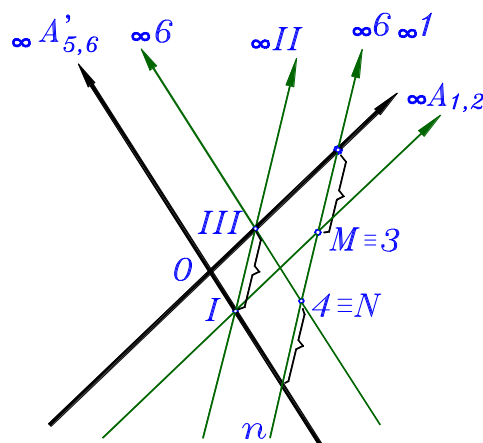
2. p ... parametr paraboly n ... normála paraboly

Subnormála je rovna parametru. (Ohniskové vlastnosti)

Pro hyperbolu lze odvodit vlastnosti, které lze pro konstrukci hyperboly využít.

Příklad 3.

Na obrázku 3.9 jsou pro hyperbolu dány asymptoty a jeden její bod - $h(\infty A, \infty A', M)$.



Obr. 3.9

Sestrojte další bod hyperboly.

- 1) Bodem M sestrojíme libovolnou přímku n . Tato přímka n je buď tečnou nebo protíná kuželosečku ve dvou bodech.
- 2) Aplikujeme Pascalovu větu.

Označíme: $\infty A \equiv 1 \equiv 2$, $\infty A' \equiv 5 \equiv 6$, $M \equiv 3$. Hledaný bod $N \equiv 4$.

Pascalova přímka p prochází bodem $I \equiv [a, \infty A']$.23.56..

a je rovnoběžná s přímkou n . $\infty II \equiv [34, 61]$..34. $\infty 6, \infty 1$.

Bod III je tedy určen: $III \equiv [4 \infty 5, 12]$ 12.4 $\infty 5$..

Doporučená animace: 2d Tecna paraboly 3 body a smer osy v bode A,

2e Tecna paraboly 3 body a smer osy v koncovem bode C, 2f Tecna paraboly 3 body a smer osy v koncovem bode, 2g Tecna paraboly 3 body a smer osy v obecnem bode. 2h Konstrukce os elipsy - Rytzova konstrukce.

3.3. Svazek, řada kuželoseček

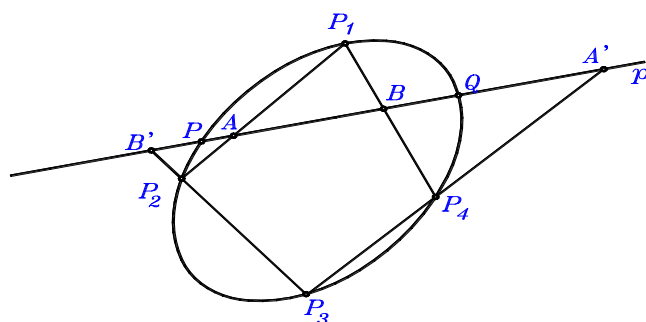
Kuželosečky jdoucí čtyřmi danými body, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce, tvoří svazek kuželoseček. Pro řešení příkladů kuželoseček daných čtyřmi body a tečnou lze využít vlastností svazku kuželoseček. Na obrázku 3.10 je svazek kuželoseček, který je dán body K , L , M a N a přímkou p . Je zde naznačena konstrukce dotykových bodů T a T' tečny p , která se dvou kuželoseček svazku právě v bodech T a T' dotýká.

Pro řešení příkladu konstrukce kuželoseček, kromě uvedených kapitol projektivní geometrie, je velmi vhodné využívat vlastností týkajících se svazku a řady kuželoseček.

Desargova věta:

Křivka 2. stupně, jejíž body určují (vepsaný) čtyřroh, protíná přímku (neprocházející žádným z těchto bodů) ve dvou bodech involuce, určené na této přímce jejími průsečíky s dvojicí protějších stran tohoto čtyřrohu.

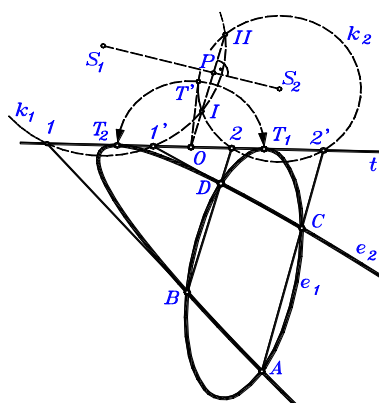
Variantu Desargovy věty lze formulovat: Kuželosečky svazku protínají přímku roviny svazku,



Obr. 3.11

která neprochází žádným vrcholem čtyřrohu, ve dvojicích involuce. Samodružné body involuce jsou dotykové body kuželoseček svazku, které se dané tečny dotýkají.

Na obrázku 3.11 je kuželosečka vepsán čtyřroh P_1, P_2, P_3, P_4 .



Obr. 3.12

Desargova věta o kuželosečkách umožňuje sestavit průsečíky P a Q přímky p s kuželosečkou jako samodružné prvky involutorních řad $s(A, B, \dots)$ a $s'(A', B', \dots)$. Jestliže přímka p je tečnou kuželosečky, je dotykový bod tečny samodružným bodem involutorních řad $s(A, B, \dots)$ a $s'(A', B', \dots)$.

Obr. 3.14

vrcholem a jsou s rovinami kolineárních útvarů rovnoběžné.

Na obrázku 3.14 je zobrazena kuželová plocha řídící kuželosečkou k ležící v rovině α a vrcholem V . Sestrojte kolineární křivku k' . Kolineace je dána osou kolineace XY , středem V a párem odpovídajících bodů A a A' .

Osa kolineace je tedy průsečnicí rovin křivek k a k' . Vrcholová rovina ATV protne osu XY v bodě I .

IA ... stopa vrcholové roviny.

Bodem V sestrojíme přímku $v \parallel AI$.

Průsečík U - bod úběžnice je stopník přímky v . $U \equiv AI * v$.

Bodem $U \in u \parallel XY$. Body CD křivky k jsou dotykové body tečen sestrojených bodem U .

Kolineární body $C'D'$ budou průměry kuželosečky k' .

Kuželosečka k' je tímto (z projektivního hlediska) dána.

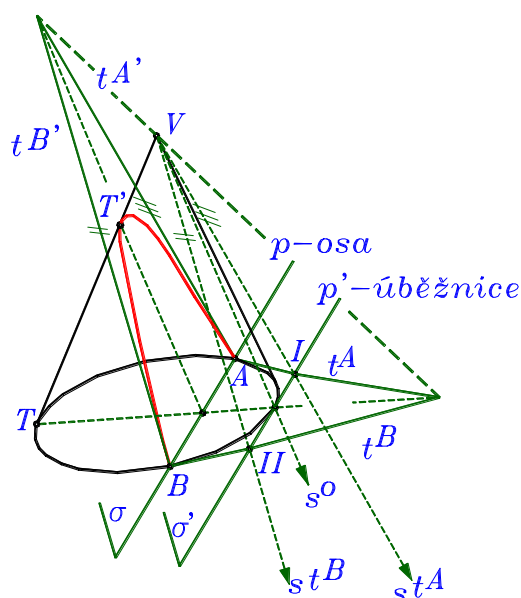
Na obrázku 3.15 a 3.16 je obdobným způsobem řešeno přiřazení kuželoseček (hyperbola, parabola).

Kolineace je dána V - střed kolineace; p - osa kolineace; p' - úběžnice. Z hlediska prostoru: vrcholová rovina je dána vrcholem V a stopou p' ; rovina řezu je dána stopou p .

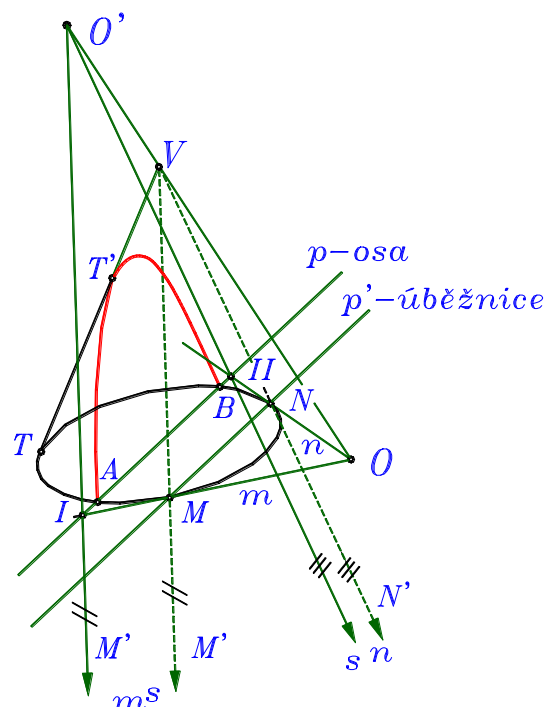
Řešení:

Bodům M a N v kolineaci odpovídají nevlastní body M^∞ a N^∞ . Tečny m' a n' v bodech M' a N' jsou kolineární přímky asymptotám hyperboly. Další postup řešení je dán stejně jako při obecném $k(Aa, Bb, C)$.

Na obrázku 3.16 je dána kuželová plocha a dva body A a B na křivce k .



Obr. 3.15



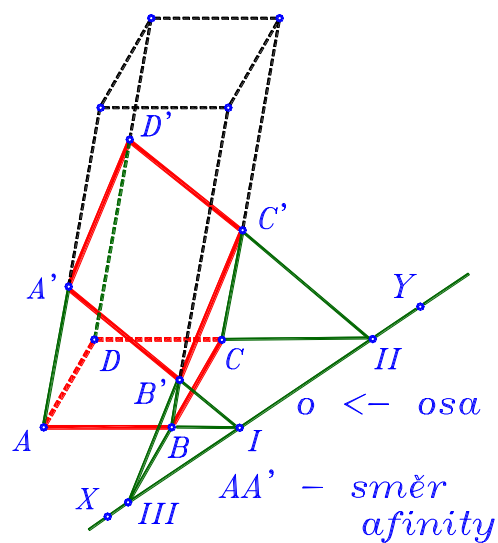
Obr. 3.16

Úkol: spojte body A a B parabolickým obloukem, který se dotýká povrchové přímky VT .

Řešení:

Rovina řezu je dána stopou $p \equiv AB$. Jestliže "řezem" má být parabola, potom rovnoběžná rovina vedená vrcholem musí být tečnou rovinou kuželové plochy. Stopa této roviny p' - úběžnice - musí být "podstavě" tečnou. Hledaná kolineární křivka k' bude určena tečnami $t^{A'}$ a $t^{B'}$, které jsou kolineární k tečnám t^A a t^B "podstavy" k .

Na obrázku 3.17 je ve volném rovnoběžném promítání dána hranolová plocha řídicím čtyřúhelníkem $ABCD$ směrem AA' . Dále je dána úsečka XY , která bude osou afinity. (Průsečnice roviny řezu s rovinou řídicí křivky.) Afinita je tedy dána osou XY a párem afinních bodů A a A' . Napište proceduru na přiřazení bodů $A', B', C', \dots$ k bodům $A, B, C, \dots$ v dané afinitě.



Obr. 3.17



Shrnutí pojmů

Polární vlastnosti kuželoseček.

Pól, polára kuželosečky. Sdružené průměry

Kvadratické soustavy bodů a přímek.

Svazek, řada kuželoseček.

Kolineace, prostor 3D, promítání, kuželosečky.

**Kontrolní otázky 3.**

1. Vysvětlete pojem: pól a polára kuželoseček.
2. Vysvětlete pojem sdružený průměr kuželosečky.
3. Vztah sdružených průměrů elipsy a jejich os. (Rytzova konstrukce.)
4. Vysvětlete konstrukci os hyperboly zadané asymptotami a bodem.
5. Vysvětlete konstrukci bodů paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku.
6. Vysvětlete postup řešení tečny kuželosečky z daného bodu.
7. Vysvětlete postup řešení tečny kuželosečky daným směrem.
8. Popište postup řešení průsečíku přímky a kuželosečky dané pěti (obecnými) body.
9. Popište postup řešení průsečíku přímky a elipsy dané sdruženými průměry s využitím afinity.
10. Popište postup řešení průsečíku přímky a paraboly dané dvěma tečnami s body dotyku.
 - a) projektivní řešení;
 - b) ohniskové vlastnosti.

4. PROSTOR, AXIOMY, POJMY



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- pojmy a jejich vlastnost, které jsou nutné pro pochopení řešení prostorových úloh
- definovat tělesa a plochy



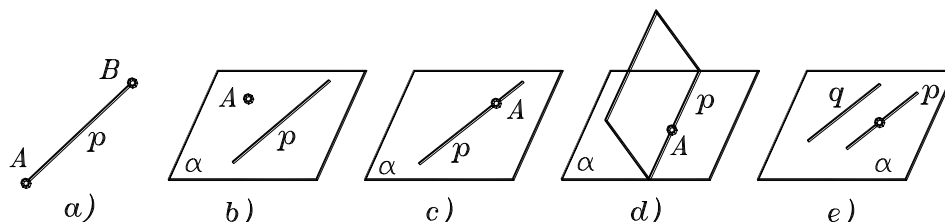
Výklad

Kapitola obsahuje pojmy a axiomy, které je třeba znát při řešení úloh geometrie. Jde zde spíše o „seznam“ potřebných vět a axiomů. Věty jsou uvedeny bez důkazů. Tyto důkazy nejsou příliš náročné a student je může najít v učebnicích pro střední a vysoké školy.

Axiomy, věty

Euklidova geometrie se opírá o axiomy:

Axióm 1. Dva různé body A, B určují právě jedinou přímku p . (Obr. 4.1a.)



Obr. 4.1

Axióm 2. Přímka p a bod A , který na přímce p neleží určují právě jednu rovinu α . $\alpha \equiv (A, p)$. (Obr. 4.1b.)

Axióm 3. Leží-li bod A na přímce p a přímka p leží v rovině α , leží i bod A v rovině α .

$$(A \in p \wedge p \in \alpha) \Rightarrow A \in \alpha. \quad (\text{Obr. 4.1c.})$$

Poznámka. Často je používán pojem „incidence“ pro vyjádření vlastnosti tohoto axiomu.

Axióm 4. Mají-li dvě různé roviny α a β společný bod A , potom mají společnou právě jednu přímku p . (Obr. 4.1d.)

Axióm 5. Ke každé přímce p lze bodem A , který na ní neleží, vést právě jednu přímku q , jež s danou přímkou p leží v rovině a nemá s přímkou p společný bod. (Obr. 4.1e.)

Základní věty o stereometrii.

V1. Mají-li dvě přímky společné dva různé body, pak jsou totožné.

V1. Mají-li dvě roviny společnou přímku a bod, který na této přímce neleží, pak jsou totožné.

V3. Mají-li přímka a rovina společné dva různé body, potom celá přímka leží v rovině.

V4. Leží-li dva různé body v rovině, potom v rovině leží také přímka určená těmito body.

V5. Rovina je určena třemi různými body, které neleží na jedné přímce.

Pojem rovnoběžnosti

V6. Dvě přímky roviny jsou rovnoběžné, jestliže nemají společný bod.

Mají-li právě jeden společný bod, jsou různoběžné. Nemají-li společný bod a nejsou přímkami jedné roviny, pak jsou mimoběžné.

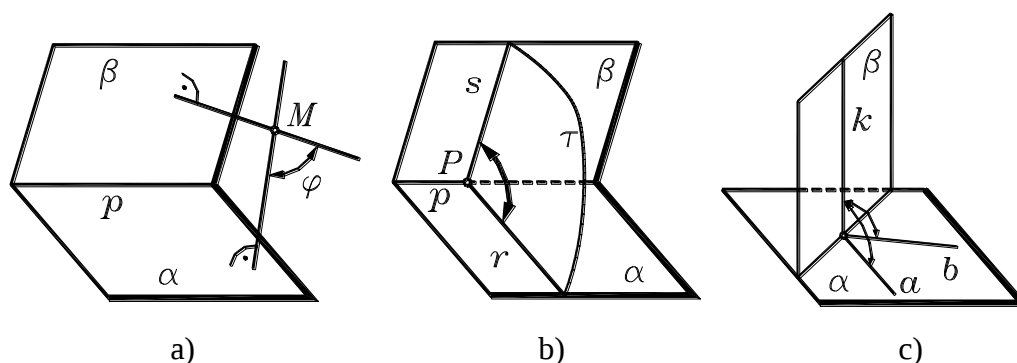
V7. Daným bodem prochází právě jedna rovina rovnoběžná s danou rovinou.

V8. Přímka v prostoru je rovnoběžná s rovinou, jestliže v dané rovině existuje přímka, která je s ní rovnoběžná.

V9. Dvě roviny v prostoru jsou rovnoběžné, jestliže v jedné z nich existují dvě různoběžky, které jsou rovnoběžné s druhou rovinou.

Úhel dvou rovin je úhel jejich normál.

Úhel přímky a roviny je doplňkový úhel přímky a normály roviny.

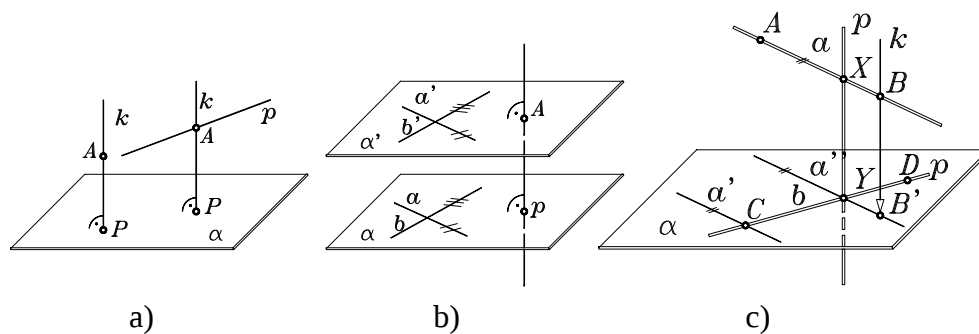


Obr. 4.2

Kolmost

Obrázky 4.3 jsou ilustrativní obrázky k pojmům kolmosti a rovnoběžnosti přímky a roviny a dvou rovin

V10. Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke všem přímkám roviny.



Obr. 4.3

Kritérium kolmosti:

Přímka je kolmá k rovině, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžkám roviny.

V11. Dvě roviny jsou kolmé, jestliže jedna obsahuje alespoň jednu přímku, která je kolmá k druhé rovině.

Vzdálenosti

Vzdálenost dvou útvarů definujeme jako nejmenší vzdálenost dvou bodů, které nepatří do jednoho útvaru.

V12. Vzdálenost dvou přímek - mimoběžek - je délka úsečky, která je na mimoběžky kolmá a je různoběžná s každou z nich. (Jde o nejkratší příčku mimoběžek - osu mimoběžek.)

Elementární plochy a tělesa

Poloprostor - prostor, který je rozdělen rovinou na dvě části. Dělicí - hraniční - rovina patří k oběma poloprostorům. Body potom jsou rozděleny na - hraniční - leží v hraniční rovině; - vnější a vnitřní. Které jsou vnitřní a vnější je nutno definovat bodem poloprostoru.

Trojhran - průnik tří poloprostorů, kde hraniční roviny mají právě jeden společný bod - vrchol trojhranu. Trojhran definujeme často pomocí hran trojhranu. (Průsečnice hraničních rovin.)

Trojhran, jehož hrany svírají pravý úhel se nazývá *pravoúhlý trojhran*.

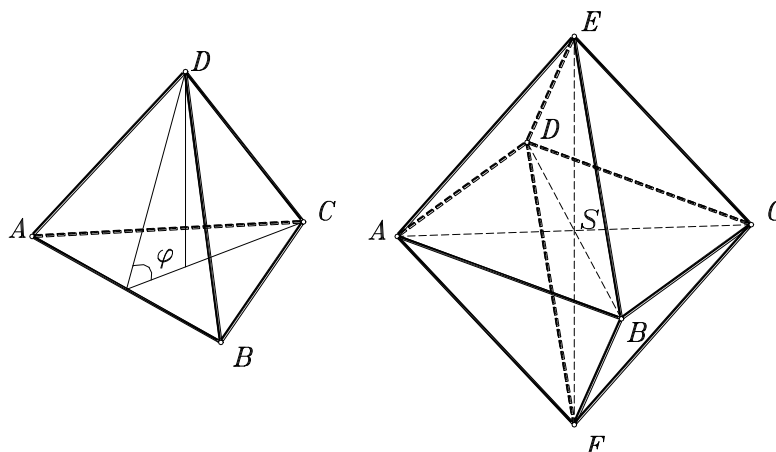
Čtyřstěn, mnohostěn

Čtyřstěn - konvexní část prostoru ohraničeného čtyřmi trojúhelníky.

Čtyřstěn - průnik čtyř poloprostorů, které nemají společný bod.

Mnohostěn - průnik poloprostorů (>3), kdy žádné tři nemají společný bod.

Mnohostěn konvexní - vypuklý - leží **vždy** právě v jednom poloprostoru **každé** hraniční roviny - stěny.

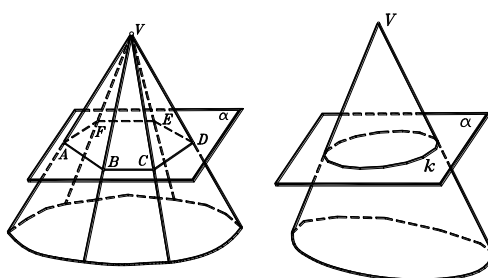


Obr. 4.4

Jehlanová - kuželová plocha, jehlanový - kuželový - prostor, jehlan - kužel.

Mějme rovinu (plochu) a v ní obecný n -úhelník (uzavřenou křivku).

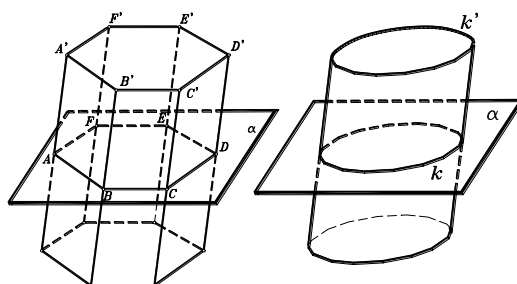
Mimo tuto rovinu mějme bod V . Plocha je potom tvořena přímkami, které procházejí bodem V a každým bodem obecného n -úhelníka. (Obr. 4.5)



Obr. 4.5

Bod V se nazývá vrchol plochy; n -úhelník je **řídící křivka** plochy a rovina (plocha) n -úhelníka je rovinou řídící křivky jehlanové resp. kuželové plochy.

Jestli-že vrchol V je *nevlastní* bod - dostaneme **hranolovou** plochu, resp. prostor. (Obr. 4.6)



Obr. 4.6

Jehlan, kužel, hranol resp. válec - prostor hraničený příslušnou plochou a řídící křivkou.

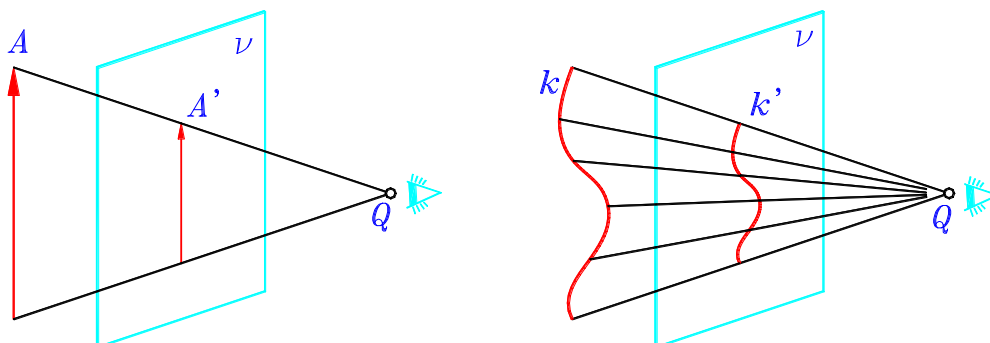
k - řídící křivka plochy

α - rovina (plocha) řídící křivky

A', B', C', D', E', F', ... body řídící křivky plochy (podstava tělesa)

Vrcholová rovina - rovina, která prochází vrcholem (plochy, tělesa).

Promítání. Základní vlastnosti a pojmy



Obr. 4.7

Střed promítání - oko, světelný zdroj. $\{O, S\}$

Promítací přímka - spojnice středu promítání s promítacím objektem - bodem. $\{p, q\}$

Průmětna - plocha (rovina) na níž získáme "obraz" promítaného objektu $\{p, n\}$

Průmět (bodu) - průsečík promítací přímky s průmětnou. $\{A', B', \dots\}$

Promítací rovina - rovina, která je určena středem promítání a přímkou, kterou promítáme.

Nevlastní bod - společný bod ("průsečík") rovnoběžných přímek $\{M, \dots\}$

Nevlastní přímka - soubor nevlastních bodů $\{p, \dots\}$.

Nevlastní rovina - soubor nevlastních přímek.

Incidence se promítáním zachovává.

Promítáním mohou přejít vlastní prvky v nevlastní a naopak.

Prostor, v němž neděláme rozdíl mezi vlastními a nevlastními prvky nazýváme **projektivním prostorem**.

Promítání, kde střed promítání je **nevlastní** bod se nazývá **rovnoběžným promítáním**.

Další vlastnosti pro **rovnoběžné promítání**. (Neplatí pro středové promítání.)

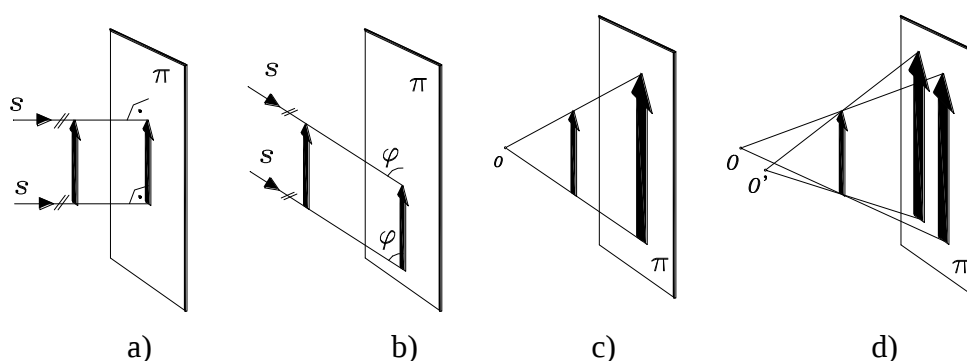
Průmětem nevlastních bodů jsou opět nevlastní body.

Rovnoběžnost přímek se zachovává.

Průmětem dvou rovnoběžných přímek jsou opět rovnoběžné přímky.

Rozdělení promítacích metod z hlediska technické praxe.

- a) Rovnoběžné promítání - promítací paprsky jsou rovnoběžné a s promítací rovinou svírají šikmý úhel. Volné rovnoběžné promítání, (technické) kosoúhlé promítání. (Obr. 4.8 b)
- b) Rovnoběžné promítání - promítací paprsky jsou rovnoběžné a s promítací rovinou svírají pravý úhel. Ortogonální - pravoúhlá - axonometrie.
- b) Středové promítání - promítací paprsky procházejí jedním bodem - středem - okem.
- Perspektivní promítání (jedno, dvou resp. tříúběžníkové). (Obr. 4.8 c)



Obr. 4.8

- c) Stereometrické promítání - dvojstředové promítání. Jde o promítání ze dvou různých bodů (očí) na jednu resp. dvě průmětny. (Obr. 4.8d)

Pojmy (základní) ve stereometrii.

Hlavní přímka roviny - přímka roviny rovnoběžná s průmětnou.

Spádová přímka roviny - přímka roviny kolmá na hlavní přímku roviny.

Normála roviny - přímka kolmá na hlavní a spádovou přímku roviny.

Stopa roviny - průsečnice roviny s průmětnou.

Promítací rovina - rovina rovnoběžná s promítacím paprskem nebo procházející středem promítání.

Průmětna - rovina (plocha) do níž promítáme. (Hlavní, pomocné průmětny.)

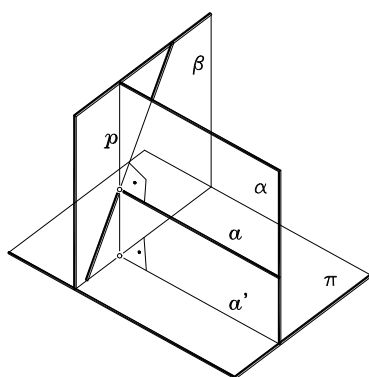
Nákresna - rovina (plocha) na níž kreslíme průměty.

Průmět - množina průmětů bodů do průmětny - průsečíků paprsků s nákresnou.

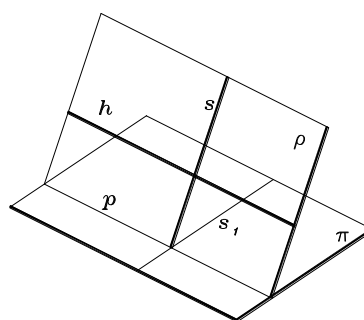
Věta o pravouhlém průmětu kolmých přímek.

Dvě přímky, které jsou na sebe kolmé se promítají jako kolmice, jestliže alespoň jedna je rovnoběžná s průmětnou a druhá není rovnoběžná s promítacím paprskem.

Úlohy v prostoru lze rozdělit na úlohy - **polohy a metrické**.



Obr. 4.9



Obr. 4.10

Poloha: incidence, průsečíky přímky, rovin.

Metrika: velikost úhlu, vzdálenost, délka úseček, oblouků, křivek.

Řešení prostorových úkolů v počítačové grafice je řešeno bez ohledu na zobrazování.

Řešíme tedy **prostorové řešení** a potom rozhodneme jakým způsobem - a zda-li vůbec - řešení zobrazíme.

Úlohy polohy.

Příklad. Rovina α je dána body A, B, C . Určete průsečík přímky PR s touto rovinou α .

Přímka je určena : $X = P + u.(R - P)$ - vektorová rovnice přímky

Rovina : $X = A + v.(B - A) + t.(C - A)$ - vektorová rovnice roviny

Vektorovou rovnicí, která určí průsečík přímky (úsečky PR) s rovinou α je dána:

$$P + u.(R - P) = A + v.(B - A) + t.(C - A)$$

Tato rovnice vede na soustavu tří rovnic o neznámých u, v a t .

Proveďte pro $P(2;1;2), R(3;1;3), A(1;2;2), B(2;2;1); C(3;5;3)$.

Řešení: $Q(1;1;1)$.

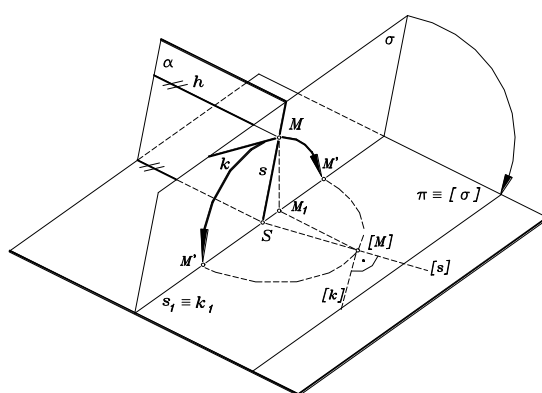
Geometrické konstrukce v 3D

Na obrázku 4.11 je zobrazena rovina α a bod M této roviny.

Úkolem je v bodě M této roviny vztyčit kolmici k na rovinu α .

Kolmice k bude kolmá ke dvěma přímkám roviny α . A to k přímce h - hlavní přímka roviny α a k přímce s - spádové přímkou roviny α .

Na obrázku 4.11 je znázorněn postup řešení tradiční konstruktivní geometrie. To je proložením promítací roviny δ a jejím sklopením do průmětny. Při použití počítačové grafiky kolmici k rovině lze určit bodem a směrem.



Obr. 4.11

Směrový vektor dostaneme jako vektorový součin vektorů dvou (libovolných) různoběžných přímek roviny.

Opakování: Skalární součin vektorů $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ a $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ je skalár:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

v souřadnicích

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Vektorový součin vektorů $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ a $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ je vektor $\underline{w}(w_1, w_2, w_3)$:

$$w_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\underline{w} = \underline{a} * \underline{b} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{v souřadnicích} \quad \begin{aligned} w_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ w_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ w_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

Smíšený součin tří vektorů $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b}(b_1, b_2, b_3)$ a $\underline{c}(c_1, c_2, c_3)$ je skalár:

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = \underline{a} \cdot (\underline{b} * \underline{c}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Komplanárnost vektorů - smíšený součin je roven nule. Velikost rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany vycházející z jednoho vrcholu jsou určeny právě těmito třemi vektory.

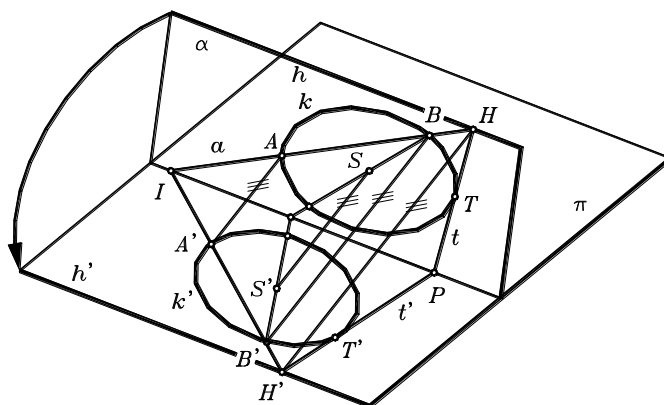
Otáčení roviny v obecné poloze do souřadnicové roviny např. π .

Příklad 1.: Sestrojte kružnici k , která leží v rovině α , prochází body A, B a dotýká se přímky t .

Řešení:

Na obrázku 4.12 je řešení znázorněno.

Předpokládejme, že rovina α není rovnoběžná s průmětnou π . Kružnice se tedy bude promítat jako elipsa.



Obr. 4.12

Konstrukce uvedená na obrázku 4.12 je takové řešení, kde je rovina α otočena okolo osy p (průsečnice rovin α a π) do průmětny π .

1. $a \equiv (A, B)$; $H \equiv (a * t)$. Bod H otočíme do průmětny π . Získáme bod H' .

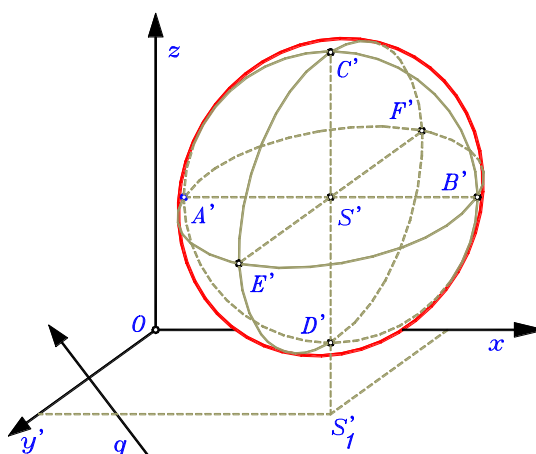
Afínní vztah mezi průmětem kružnice k a kružnicí k' je dán:

osa afinity je přímka p ; směr afinity je dán vektorem spojnice HH' .

2. K bodům $A, B, \dots$ průmětům bodů v rovině α najdeme afínní body $A', B', \dots$

a) sestrojíme $AA' // HH'$, $BB' // HH'$, cyklus pro všechny body

b) $(HA * p) \equiv I$, $(H'I * AA') \equiv A'$ cyklus pro všechny body



Obr. 4.13

K afinním útvarům provedeme požadované konstrukce - kružnici, která prochází body A' , B' a dotýká se tečny t' .

3. Získané body S' , T' , ..., jsou afinní body průmětu křivky k .

Pro průmět získáme význačné body (střed, a pod.) nebo jiné určující prvky pro vykreslení křivky. Afinitu lze volit i jiným, než právě popsaným způsobem.

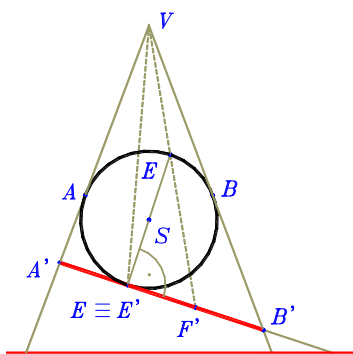
Toto „tradiční“ řešení je v grafických systémech nahrazeno transformací souřadnicového systému tak, že souřadnicová rovina π' transformovaného systému je ztotožněna s obecnou rovinou α . Konstrukce je provedena v transformované rovině π' a transformována „zpět“ do původní souřadnicové soustavy.

Příklad 2. Je dána kulová plocha κ středem S a poloměrem r . Sestrojte řezy této plochy průměrovými rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami.

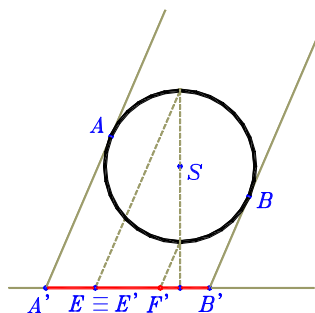
Na obrázku 4.13 je zobrazena kulová plocha κ pomocí řezů rovinami $x = x_s$, $y = y_s$, $z = z_s$. Jde o kruhové řezy, které se promítají jako elipsy. (Řez rovinou $y = y_s$ se promítá jako kružnice.) Pro eliptické průměty jsou průměry $A'B'$, $C'D'$ a $C'D'$, $E'F'$ sdružené.

Pro konstrukci obrysové křivky můžeme využít věty Quetelet-Dandelinovy.

Věta zní: Rotační kuželová plocha je prořata rovinou, která není vrcholová ani není kolmá k ose plochy a která svírá s rovinou řídící kružnice plochy menší úhel než povrchové přímky plochy, v elipse. Ohniska elipsy jsou dotykové body kulových ploch, které jsou kuželové ploše vepsány a roviny řezu se dotýkají.



Obr. 4.14



Obr. 4.15

Využití této věty je znázorněno na obrázku 4.14 pro průměty kulové plochy v středovém promítání resp. středovém osvětlení. Na obr. 4.15 jde o rovnoběžné promítání resp. rovnoběžné osvětlení.



Otázky 4.

1. Euklidovský prostor. Metrika, průměty úhlů, kolmost.
2. 3D objekty. Tělesa, plochy, prostor.



Úlohy k řešení 4.

Plochy a tělesa zobrazujte jako drátěné modely v TKP.

1. Zobrazte nejmenší kulovou plochu, která se dotýká dvou mimoběžek.

Dáno: $a \equiv (A,B)$, $b \equiv (C,D)$.

2. Zobrazte pravidelný čtyřstěn, který je dán jedním vrcholem a rovinou podstavy v níž daný vrchol neleží. Jedna hrana podstavy je rovnoběžná se stranou AB.

Dáno: Rovina $\alpha \equiv (A,B,C)$. Vrchol V.

3. Zobrazte pravidelný osmistěn, který je dán vrcholem A a nositelkou p úhlopříčky, která vrcholem A neprochází. Dáno $p \equiv (P,Q)$, A.
4. Zobrazte rovnoběžnostěn, jehož hrany leží na třech mimoběžkách a,b,c .

Dáno: $a \equiv (A,B)$, $b \equiv (C,D)$, $c \equiv (E,F)$.

5. Zobrazte nejmenší krychli, která je dána nositelkou tělesové úhlopříčky a jejíž jeden vrchol leží na přímce p . Dáno: úhlopříčka leží na $u \equiv (A,B)$, přímka $p \equiv (P,Q)$.

5. KŘIVKY



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- vlastnosti křivek a jejich zadávání
- definovat křivky v rovině i prostoru
- uvést příklady z praxe



Výklad

5.1. Křivky. Parametrická a vektorová rovnice křivky

Definice regulární křivky v trojrozměrném Euklidovském prostoru E_3 v němž je dána kartézská soustava souřadnic.

Mějme tři funkce

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad (5.1)$$

které splňují předpoklady:

- Funkce (5.1) jsou reálné funkce reálné proměnné t definované na společném otevřeném intervalu J .
- Ve všech bodech intervalu J jsou všechny funkce (5.1) spojité alespoň prvními derivacemi.
- Ve všech bodech intervalu J platí

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2 \neq 0. \quad (5.2)$$

- Dvěma různými body t_1, t_2 z intervalu J přiřazují funkce (5.2) v prostoru E_3 dva různé body

$$[x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)], [x_1(t_2), x_2(t_2), x_3(t_2)].$$

Jestliže jsou splněny výše uvedené předpoklady, potom množina všech bodů $P(t) \in E_3$, jejichž souřadnice $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ jsou dány rovnicemi (5.1), nazýváme **regulární křivkou** (křivkou).

Rovnice (5.1) nazýváme **parametrickými rovnicemi** této křivky.

Každý bod této křivky je dán jednoznačně parametrem t z intervalu J .

Přiřadíme každému takovému bodu tzv. **průvodič** $\mathbf{p}(t)$. Je tím dán vektor, který je počátkem umístěn v počátku souřadnic a koncový bod průvodiče je právě v bodě $P(t)$.

Průvodič $\mathbf{p}(t)$ má stejné souřadnice jako jeho koncový bod $P(t)$, který není ve zkoumané křivce pevný.

Mění se na hodnotách parametru t v intervalu J . Průvodič $\mathbf{p}$ je vektorovou funkcí parametru t . Tuto vektorovou funkci můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{p} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \quad (5.3)$$

stručně

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t). \quad (5.4)$$

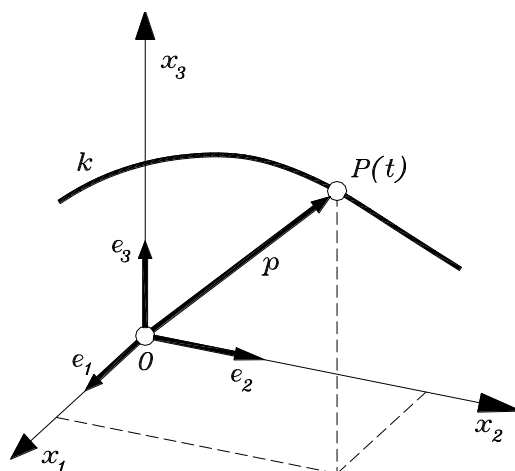
Rovnici (5.4) nazýváme vektorovou rovnicí dané křivky.

Tuto rovnici lze upravit do tvaru:

$$\mathbf{p} = x_1(t) \cdot (1, 0, 0) + x_2(t) \cdot (0, 1, 0) + x_3(t) \cdot (0, 0, 1).$$

Ve vektorovém označení:

$$\mathbf{p} = x_1(t) \cdot \mathbf{e}_1 + x_2(t) \cdot \mathbf{e}_2 + x_3(t) \cdot \mathbf{e}_3.$$



Obr. 5.1

Příklad 1. Mějme parametrické rovnice

$$x_1 = r \cdot \cos t, \quad x_2 = r \cdot \sin t, \quad x_3 = c \cdot t,$$

kde $t \in (-\infty, +\infty)$ a r, c jsou dané nenulové konstanty.

Pro $r > 0$ jde o šroubovici.

Lze vyjádřit také $\mathbf{p} = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c \cdot t)$ resp. $\mathbf{p} = r \cdot \cos t \cdot \mathbf{e}_1 + r \cdot \sin t \cdot \mathbf{e}_2 + c \cdot t \cdot \mathbf{e}_3.$

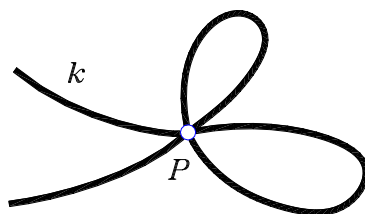
Příklad 2. Mějme parametrické rovnice

$$x_1 = t^2, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = 0,$$

kde $t \in (-\infty, +\infty)$, je popsána přímka v rovině $x = 0$.

Pro parametr $t = 0$ není splněna podmínka (5.2). To znamená, že křivka není regulární křivkou podle uvedené definice. Body, pro které podmínka (5.2) je splněna nazveme **regulární** body křivky. Ostatní body křivky, nazveme **singulárními** body křivky. Křivka, která obsahuje singulární body není křivkou regulární, ale pouze **křivkou**. Na obrázku 5.2 je zobrazen příklad křivky, která "prochází" singulárním bodem P vícekrát. Tedy pro více hodnot parametru t je splněna podmínka (5.2).

Bod P potom nazýváme *vícenásobným bodem* křivky.



Obr. 5.2

5.2. Explicitní a implicitní rovnice křivky

Vydeme z parametrického vyjádření křivky. Předpokládejme, že máme dvě funkce

$$x_3 = f(x_1), \quad x_2 = g(x_1), \quad (5.5)$$

které jsou definovány na společném otevřeném intervalu J a jsou spojité i se svými prvními derivacemi. Potom množinu všech bodů, které leží v prostoru E_2 a které můžeme napsat ve tvaru $[x_1, f(x_1), g(x_1)]$, nazýváme *regulární křivkou definovanou explicitně*. Rovnice (5.5) jsou tzv. *explicitní rovnice* křivky.

Zavedeme-li parametr t pro proměnou x , dostaneme:

$$x_1 = t \quad x_2 = f(t), \quad x_3 = g(t), \quad (5.6)$$

tedy *parametrické vyjádření* téže křivky pro $t \in (-\infty, +\infty)$ a že rovnice (5.6) splňují podmínky a), b), c) a d).

Jestliže křivku nelze vždy vyjádřit explicitně (na př. kružnice), lze ukázat, že toto explicitní vyjádření lze provést v dostatečně malém okolí kteréhokoliv bodu regulární křivky.

Implicitní vyjádření křivky zavedeme pomocí této definice:

Mějme dány dvě funkce

$$w = h(x_1, x_2, x_3), \text{ a } w = g(x_1, x_2, x_3),$$

které jsou definovány v nějaké společné trojrozměrné oblasti $\Omega \in E_3$ a které jsou zde spojité i se všemi prvními parciálními derivacemi. Nechť množina bodů $[x_1, x_2, x_3]$, které jsou v oblasti Ω určeny rovnicemi

$$h(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{a} \quad g(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (5.7)$$

je neprázdná a v každém bodě této množiny nechť má matice hodnost rovnou dvěma.

Množina, která splňuje tyto
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$
 požadavky nazýváme *regulární křivkou* definovanou *implicitně*. (5.8)

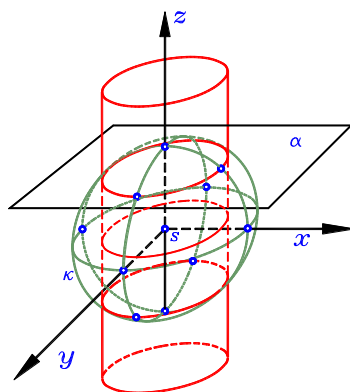
Rovnice (5.7) jsou *implicitní rovnice* této křivky.

Křivka takto definovaná je vlastně **průnikem** ploch, které jsou dány rovnicemi (5.7).

Na obrázku 5.3 je dána prostorová křivka jako "průnik" kulové plochy κ danou rovnicí

$$\kappa \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (5.8)$$

a válcové plochy φ dané rovnicí $\varphi \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$. (5.9)



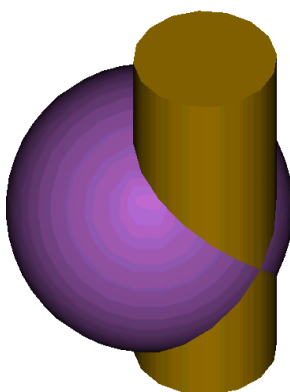
Obr. 5.3

Výsledná křivka takového průniku se rozpadne na dvě kružnice, které vlastně leží v rovinách α a α' o rovnicích

$$\alpha \equiv z = +\sqrt{R^2 - r^2} \quad \text{a} \quad \alpha' \equiv z = -\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Křivku, která je dána implicitně nelze vždy vyjádřit explicitně. Lze však ukázat, že pro dostatečně malé okolí křivky lze provést úpravu a vyjádřit křivku explicitně.

Na obrázku 5.4 je zobrazen průnik kulové a rotační válcové plochy, kdy osa válcové plochy prochází středem kulové plochy a průměr válcové plochy je roven poloměru plochy kulové. Průniková křivka těchto ploch se nazývá Vivianiho křivka.



Obr. 5.4

Příklad 3. Vektorovou rovnici

$$\mathbf{p} = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t, 0),$$

$$\text{kde } t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad a > 0, b > 0$$

je vyjádřena elipsa. Rozepsáním do parametrických rovnic dostaneme:

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t, \quad z = 0.$$

Po úpravě (Vyloučíme parametr t : jednu rovnici vydělíme a resp. b , obě rovnice umocníme 2

a sečteme) dostaneme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, což jsou implicitní rovnice dané křivky.

Vypočteme-li z první rovnice proměnnou y , dostaneme explicitní rovnice elipsy:

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}, \quad z = 0 \quad \text{resp.} \quad y = -\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}, \quad z = 0.$$

Tyto rovnice vyjadřují tu část elipsy pro níž platí: $y > 0$ resp. $y < 0$.

Příklad 4. Mějme parametrické rovnice (Viz. př.1)

$$x = r \cdot \cos t, \quad y = r \cdot \sin t, \quad z = c \cdot t,$$

kde $t \in (-\infty, +\infty)$ a r, c jsou dané nenulové konstanty. Jde o šroubovici.

Z poslední rovnice vypočteme t jako funkci proměnné z .

Dostaneme
$$t = \frac{z}{c}$$

Po dosazení do prvních dvou rovnic dostaneme $x = r \cdot \cos \frac{z}{c}, \quad y = r \cdot \sin \frac{z}{c},$

což jsou explicitní rovnice šroubovice. Jednoduchou úpravou dostaneme implicitní rovnice.

$$x - r \cdot \cos \frac{z}{c} = 0, \quad y - r \cdot \sin \frac{z}{c} = 0.$$

5.3 Transformace parametru křivky

Pro vlastní výpočet bodů křivky zadané vektorovou rovnicí bývá někdy vhodné použít transformaci parametru křivky. Přejdeme tak k jiné vektorové rovnici, která ovšem vyjadřuje tutéž křivku. Tento přechod se nazývá *regulární transformace parametru*. Pro tuto operaci musí platit:

Zavedeme-li funkci
$$t = t(\bar{t}), \quad (5.9)$$

která je definována na otevřeném intervalu $\bar{J}$, kde je spojitá i se svou první derivací. Jestliže v každém bodě této funkce (5.9) platí:

$\frac{dt}{d\bar{t}} \neq 0$, potom funkci (5.9) nazýváme *přípustnou funkcí*. Na obrázku 5.5 je zobrazena

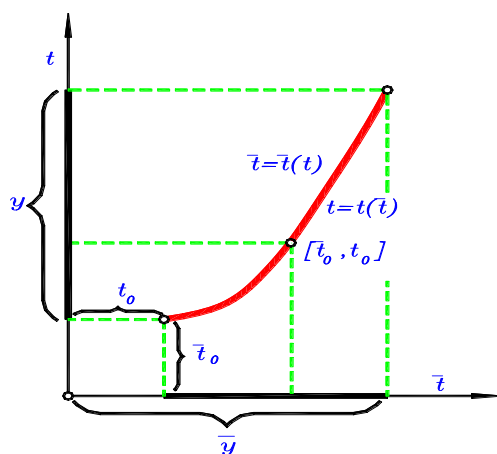
přípustková funkce realizující jednoznačné přiřazení intervalu $\bar{J}$ interval J , kde každému bodu $\bar{t}_0 \in \bar{J}$ odpovídá právě jeden bod $t \in J$. Předpokládejme křivku danou parametrickou rovnicí

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \quad t \in J \quad (5.10)$$

Zavedeme vektorovou rovnici

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}[t(\bar{t})], \quad t \in J, \quad (5.11)$$

jejíž pravá strana vznikla složením funkcí (5.9) a (5.10).



Obr. 5.5

Bodům $t \in J$ a $\bar{t} \in \bar{J}$, které jsou vázány rovnicí (5.9), přiřazují vektorové rovnice (5.10) a (5.11) tentýž vektor.

Z uvedeného tedy plyne:

Rovnice (5.10) a (5.11) jsou vektorové rovnice téže křivky.

Takovéto operaci, kdy přejdeme z jedné vektorové rovnice na jinou, která vyjadřuje tutéž křivku říkáme *regulární transformace parametru* na křivce.

Příklad 5. Mějme křivku danou vektorovou rovnicí

$$\mathbf{p} = (2t, \sin \sqrt{t}, e^t), \text{ pro } t \in (1, 2).$$

Zavedením přípustkové funkce $t = \bar{t}^2$, pro $\bar{t} \in (1, 4)$

provedeme na dané křivce regulární transformaci parametru a vyjádříme danou křivku:

$$\mathbf{p} = (2\bar{t}^2, \sin \bar{t}, e^{\bar{t}^2}), \text{ pro } \bar{t} \in (1, 4).$$

5.4 Délka křivky

Oblouk regulární křivky, která je dána vektorovou rovnicí

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \text{ pro } t \in J$$

budeme na intervalu J definovat funkci

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt, \quad t \in J. \quad (5.12)$$

Funkce $s(t)$ je definována na celém intervalu J a nazývá se obloukem křivky. Oblouk křivky začíná v bodě $P(t)$, který odpovídá parametru t a končí v bodě $P(t)$ odpovídajícímu parametru t . Délka křivky v diferenciálním a integrálním počtu je definována jako absolutní hodnota funkce oblouku $|s(t)|$.

Po zavedení označení:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \quad \text{resp.} \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt}, \quad (5.13)$$

můžeme psát

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt \quad (5.14)$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{p} \cdot \dot{p}} \cdot dt \quad (5.15)$$

Dále označíme $\dot{s}(t)$ derivaci funkce $s(t)$. Z rovnic (5.14) a (5.15) plyne

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{p} \cdot \dot{p}} \quad (5.16)$$

Z tohoto a (5.2) plyne, že pro všechna $t \in J$ je $\dot{s} \neq 0$.

K funkci $s = s(t)$, pro $t \in J$ lze sestavit inverzní funkci

$$t = t(s) \quad s \in I.$$

Z (5.16) vypočteme, že pro derivaci této inverzní funkce

$$\text{platí:} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dot{p} \cdot \dot{p}}}.$$

Jelikož na celém intervalu J je $\dot{s}(t) \neq 0$, má i inverzní funkce $t = t(s)$ v odpovídajícím intervalu I derivaci různou od nuly. Můžeme proto pomocí této přípustkové funkce provést regulární transformaci parametru na křivce, pro níž máme vektorovou rovnici

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}[t(s)], \quad \text{kde } s \in I, \quad (5.17)$$

$$\text{resp. } \mathbf{p} = \mathbf{p}(s), \quad \text{kde } s \in I. \quad (5.18)$$

V rovnicích (5.17) a (5.18) parametrem je oblouk. Parametr s tedy "měří" na křivce její délku.

Příklad 5. Na šroubovici dané vektorovou rovnicí zaveďte oblouk jako parametr.

Vektorová rovnice šroubovice:

$$\mathbf{p} = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c t) \quad \text{pro } t \in (-\infty, +\infty).$$

Spočteme, že $\dot{\mathbf{p}} = (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t, c)$,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}} \, dt = \int_0^t \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t + c^2} \, dt$$

čili $s = t \cdot \sqrt{r^2 + c^2}$, pro $t \in (-\infty, +\infty)$.

K funkci $s(t)$ vypočteme inverzní funkci

$$t = \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad s \in (-\infty, \infty).$$

Odtud plyne, že hledaná vektorová rovnice, ve které parametr s je obloukem, má tvar

$$\mathbf{p} = \left(r \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, r \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \frac{c \cdot s}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right), \text{ pro } s \in (-\infty, \infty).$$



Kontrolní otázky 5.

1. Implicitní a explicitní zadání křivek v rovině, v prostoru.
2. Vektorová rovnice křivek. Příklad použití.
3. Délka křivky.

6. KŘIVKY. TEČNÁ A OSKULAČNÍ ROVINA



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- vlastnosti tečen křivek
- definovat a konstruovat tečny křivky
- definovat křivosti křivek



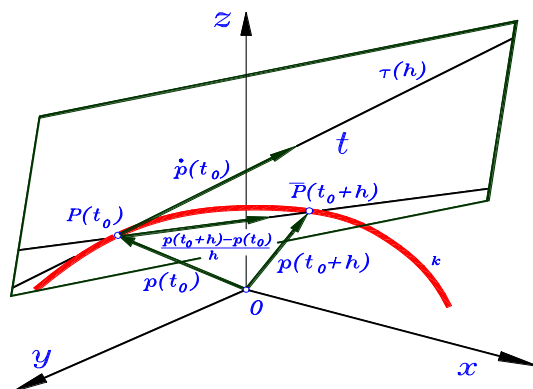
Výklad

6.1 Tečna křivky

Na obrázku 6.1 je znázorněna prostorová křivka ke které je v bodě $P(t_0)$ nakreslena tečna.

Mějme křivku k popsanou vektorovou rovnicí

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \text{ pro } t \in J \quad (6.1)$$



Obr. 6.1

Na křivce k zvolíme dva různé body $P(t_0)$ a $P(t_0 + h)$. Průvodiče těchto bodů budou označeny $\mathbf{p}(t_0)$ a $\mathbf{p}(t_0 + h)$.

Přímka, která prochází těmito body $P(t_0)$ a $P(t_0 + h)$ je **sečnou** křivky k . Tuto sečnu lze určit vlastně bodem $P(t_0)$

a vektorem

$$\mathbf{p}(t_0 + h) - \mathbf{p}(t_0) \quad (6.2)$$

$$\text{resp. kolineárním vektorem } \frac{\mathbf{p}(t_0 + h) - \mathbf{p}(t_0)}{h} \quad (6.3)$$

Jestliže $h \rightarrow 0$, to znamená že "pohyblivý" bod $\mathbf{p}(t_0 + h)$ se přiblíží k pevnému bodu $\mathbf{p}(t_0)$.

Limitní případ této sečny nazveme **tečnou** křivky k a bod $\mathbf{p}(t_0)$ bodem dotyku tečny křivky k .

Lze ukázat, že v každém regulárním bodě existuje právě jedna tečna. Jestliže je křivka popsána rovnicí (6.1), potom tečna sestavená v bodě $P(t_0)$ je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{p}(t_0)$ a má vektorovou rovnici

$$\mathbf{y} = \mathbf{p}(t_0) + \lambda \dot{\mathbf{p}}(t_0),$$

kde $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ a $\mathbf{y}$ je označení pro průvodní vektor běžného bodu uvažované tečny.

Doporučená animace: 6a Tecna krivky

Z fyzikálního hlediska bývá parametr t vyjadřován obloukem s . Je tím vyjadřována rychlost.

Stanovíme t tečnu křivky k v bodě $[x, y, z]$ zadané **implicitními rovnicemi**

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{a} \quad g(x, y, z) = 0. \quad (6.4)$$

Křivku k můžeme vyjádřit parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (6.5)$$

V uvažovaném okolí musí platit tyto dvě identity:

$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad g(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Derivováním dostaneme pro neznámé souřadnice

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

tečného vektoru křivky k v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ dvě rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Algebraickým řešením těchto rovnic (až na násobek) je vztah

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (6.7)$$

Často je jedna z ploch určující křivku rovinou. V tom případě rovnice (6.4) mají tvar

$$f(x, y) = 0, \quad z = 0.$$

Odtud potom rovnice (6.6) mají tvar:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

Zápis hledaného řešení:

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} : -\frac{\partial f}{\partial x} : 0$$

Příklad 1. Napište rovnici tečny v bodě $T[3; 4; 0]$ křivky dané implicitně:

$$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0, \quad g \equiv x + y + z - 7 = 0.$$

Vypočteme aplikací (6.6) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_T &= 6, & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_T &= 8, & \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_T &= 0, \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_T &= 1, & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_T &= 1, & \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_T &= 1, \end{aligned}$$

Soustava (6.6) má tvar:

$$\begin{aligned} 6 \frac{dx}{dt} + 8 \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Řešením je vektor $(8, -6, -2)$. Tečna v bodě T zapsána vektorovou rovnicí je:

$$y = (3, 4, 0) + \lambda(8, -6, -2), \quad \text{kde } \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

6.2 Oskulační rovina křivky

Každá rovina, která prochází *tečnou* dané křivky, se nazývá *tečnou rovinou* křivky. *Dotykovým* bodem je *dotykový* bod křivky, kterým jsme vedli tečnu. (Tečné roviny tvoří svazek rovin.) Jediná tečná rovina (z tohoto svazku rovin) se nazývá *oskulační rovina*.

Na obr. 6.1 je zobrazena rovina $\pi(h)$, která je určena tečnou t a spojnicí bodů $P\bar{P}$. Zmíněný svazek tečných rovin je tedy určen tečnou t . Jednotlivé tečné roviny jsou tedy dány tečnou t a pohyblivým bodem $\bar{P}$ na křivce k . Jestliže bod $\bar{P}$ se pohybuje po křivce tak, že se blíží k bodu $P(t_0)$, potom v limitním případě, kdy pohyblivý bod $\bar{P}$ splyne s bodem P se tato tečná rovina nazývá *oskulační rovinou* křivky k . Je možno ukázat, že křivka, která není přímkou nebo její částí, má **právě jednu** oskulační rovinu. V opačném případě má křivka nekonečně mnoho "oskulačních" rovin a v tom případě pojem oskulační rovina nezavádíme.

Oskulační rovina $\pi(h)$ je určena bodem $P(t_0)$ a dvěma různoběžnými vektory, které jsou s touto rovinou rovnoběžné

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0) \quad \text{a} \quad \mathbf{p}(t_0 + h) - \mathbf{p}(t_0) \quad (6.8)$$

Zmíněná rovina $\pi(h)$ je také rovnoběžná s vektory

$$\dot{\mathbf{p}}(t_0) \quad \text{a} \quad 2 \frac{\mathbf{p}(t_0 + h) - \mathbf{p}(t_0) - h\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{h^2}, \quad (6.9)$$

které jsou lineární kombinací vektorů (6.8).

Budeme-li zkoumat, za jakých podmínek existuje v daném bodě oskulační rovina. Zřejmě musí platit

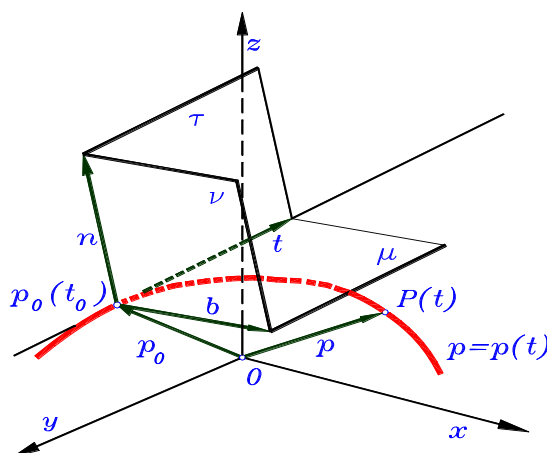
$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{p}(t_0 + h) = \mathbf{p}(t_0),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\mathbf{p}(t_0 + h) - \mathbf{p}(t_0) - h\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0 + h) - \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{h} = \ddot{\mathbf{p}}(t_0)$$

(podle L'Hospitalova pravidla)

Odtud plyne tvrzení: v každém bodě křivky k existuje oskulační rovina a je rovnoběžná s vektory $\dot{\mathbf{p}}(t_0)$ a $\ddot{\mathbf{p}}(t_0)$ (6.10)

Nadále se budeme zabývat pouze případy, kdy existuje pouze jediná oskulační rovina.



Obr. 6.2

Na obrázku 6.2 je znázorněna křivka k s tečnou t a je zde dále znázorněna oskulační rovina τ . Jestliže v této oskulační rovině sestrojíme kolmici n na tečnu t , potom tato kolmice n se nazývá **hlavní normálou** křivky k . Kolmice b vztyčená v bodě dotyku na oskulační rovinu τ se nazývá **binormála**. Rovina určená hlavní normálou a binormálou b se nazývá **normálová** rovina. Rovina μ určená tečnou t a binormálou b se nazývá **rektifikační** rovinou křivky k v bodě $p_0(t_0)$.

Roviny τ , ν a μ tvoří **doprovodný** trojhran křivky k v bodě P . Tečna t , hlavní normála n a binormála b tvoří hrany tohoto trojhranu.

Dále lze ukázat, že pojem oskulační roviny nezávisí na tom, zdali parametrem křivky byl oblouk či nikoliv.

Doporučená animace: 6b Oskulační rovina křivky

Frenetovy vzorce. První křivost křivky

Budeme předpokládat, že křivku k máme danou vektorovou rovnicí

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(s), \quad s \in I, \quad (6.11)$$

kde parametr s je obloukem. Označíme $\mathbf{p}'(s)$ a $\mathbf{p}''(s)$ vektory rovnoběžné s oskulační rovinou sestrojené v bodě $P(s)$ křivky k . Vektor $\mathbf{p}''(s)$ budeme nazývat *vektorem první křivosti* křivky v bodě $P(s)$. Velikost tohoto vektoru budeme označovat ${}^1k(s)$ (stručně 1k) a nazývat *první křivostí* (*flexí*) křivky v bodě $P(s)$. Pro určení velikosti vyjdeme z rovnice

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}' = 1,$$

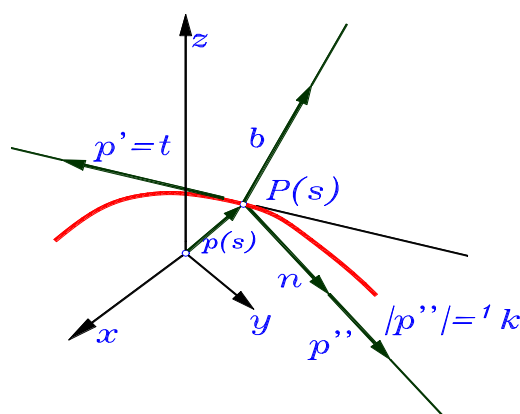
která je splněna pro všechna $s \in I$. Po derivaci obou stran rovnice podle parametru s dostaneme

$$\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{p}' + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'' = 0$$

tedy

$$2 \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'' = 0.$$

Toto však znamená, že v každém bodě $P(s)$ křivky k je vektor $\mathbf{p}''(s)$ buď nenulovým vektorem kolmým na tečný vektor $\mathbf{p}'(s)$, nebo nulovým vektorem. Předpokládejme první možnost. To je $\mathbf{p}'' \neq 0$ a $\mathbf{p}'' \perp \mathbf{p}'$. Je zřejmé, že tomu tak může být pouze tehdy, jestliže vektor $\mathbf{p}''$ je rovnoběžný s hlavní normálou n křivky k (Obr. 6.3).



Obr. 6.3

Pomocí rovnice

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}''}{|\mathbf{p}''|} \quad (6.12)$$

sestrojíme *jednotkový vektor hlavní normály* $\mathbf{n}$, kolineární s vektorem $\mathbf{p}''$. Jelikož $|\mathbf{p}''| = k$, můžeme psát

$$\mathbf{p}'' = k \mathbf{n}. \quad (6.13)$$

Obdobně zavedeme pro jednotkový tečný vektor $\mathbf{p}'$ označení $\mathbf{t} = \mathbf{p}'$, můžeme rovnici (6.13) vyjádřit

$$\mathbf{t}' = {}^1k \mathbf{n} \quad (6.14)$$

Tento vzorec (6.14) nazýváme **prvním Frenetovým vzorcem**.

Pomocí dvou jednotkových vektorů $\mathbf{t}$ a $\mathbf{n}$ definovaných v bodě $P(s)$, sestrojíme jednotkový vektor $\mathbf{b}$, který je kolmý na oba vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{b}$. Tento vektor $\mathbf{b}$ určíme rovnicí $\mathbf{b} = \mathbf{t} * \mathbf{n}$. Je zřejmé (viz obr. 6.3), že vektor $\mathbf{b}$ je rovnoběžný s binormálou v bodě $P(s)$. Druhá možnost, kdy $\mathbf{p}'' = 0$, znamená že je také první křivost 1k v daném bodě $P(s)$ rovna nule. V tomto případě **každá** tečná rovina je rovinou oskulační. A zkoumaná křivka v tomto bodě $P(s)$ je *přímkou* nebo její částí.

Výpočet první křivosti provedeme na příkladu.

Příklad 2. Vypočítejte první křivost v libovolném bodě šroubovice, která je dána vektorovou rovnicí $\mathbf{p} = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t, c \cdot t)$.

Vektorovou rovnici přepíšeme, tak aby parametrem byl oblouk.

$$\mathbf{p} = \left(r \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad r \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad \frac{c \cdot s}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right),$$

kde $s \in (-\infty, +\infty)$.

Postupným derivováním dostaneme

$$\mathbf{p}'' = \frac{1}{r^2 + c^2} \left(-r \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad -r \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad 0 \right).$$

Odtud a ze vzorce

$${}^1k = |\mathbf{p}''| = \sqrt{\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{p}''}$$

plyne, že

$${}^1k = \frac{r}{\sqrt{r^2 + c^2}}.$$

První křivost šroubovice je *konstantní*.

V následujícím se budeme zabývat křivkou, která bude vyjádřena **obecně rovnicí**

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \quad t \in J, \quad (6.15)$$

kde parametr t je obecným parametrem. Tuto rovnici (6.15) přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}[s(t)], \quad t \in J. \quad (6.16)$$

Pravá strana rovnice (6.16) vznikla složením funkcí $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ a $s = s(t)$.

Derivováním obou stran rovnice (6.16) dostaneme další rovnici

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{p}' \frac{ds}{dt}. \quad (6.17)$$

Vynásobením skalárně levou i pravou stranu samo sebou odvodíme vztah

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (6.18)$$

Úprava rovnice (6.17) pomocí (6.18) vede k nové rovnici

$$\mathbf{p}' = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}}}. \quad (6.19)$$

Obě strany této rovnice derivujeme podle parametru t . Po úpravě dostaneme:

$$\mathbf{p}'' = \frac{ds}{dt} = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}}{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}^{3/2}} \quad ({}^1k)^2 = \frac{\ddot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \ddot{\mathbf{p}}}{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}^{3/2}}$$

Po zavedení tzv. Lagrangeovy identity dostáváme konečný výsledek

$$({}^1k)^2 = \frac{|\dot{\mathbf{p}} * \ddot{\mathbf{p}}|^2}{\dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}^3}. \quad (6.20)$$

Jestliže je křivka dána parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

potom z (6.20) plyne, platí

$$({}^1k)^2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}}. \quad (6.21)$$

V případě, že křivka leží v rovině $z = 0$ a je dána rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0,$$

rovnice (6.21) se zjednoduší a mají tvar

$$({}^1k)^2 = \frac{(\ddot{y} - \ddot{x})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (6.21)$$

Má-li rovinná křivka speciální popis $x = t, y = y(t), z = 0$,

leží tato křivka v rovině $z = 0$ a je grafem funkce $y = y(x)$. V tomto případě se rovnice (6.21) se zjednoduší, a to do následujícího vzorce

$$({}^1k)^2 = \frac{\ddot{y}^2}{(\dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (6.22)$$

Druhá křivost křivky

Druhou křivost 2k v bodě $P(s)$ křivky k odvodíme zkoumáním binormály. Vydeme z rovnice (obdobně jako u 1. křivosti) s parametrem s a derivujeme obě strany rovnice

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1.$$

Dostaneme tak vztah

$$2\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = 0,$$

z čehož plyne, že vektor $\mathbf{b}'$ je v každém bodě křivky k kolmý k vektoru $\mathbf{b}$, nebo je nulovým vektorem.

Vyjádříme tedy vektor $\mathbf{b}'$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{t}$ a $\mathbf{n}$ takto:

$$\mathbf{b}' = A\mathbf{t} - {}^2k\mathbf{n}, \quad (6.23)$$

kde $A, {}^2k$ jsou neznámé konstanty v lineární kombinaci. Vynásobíme skalárně obě strany rovnice vektorem $\mathbf{t}$. Dostaneme tak

$$\mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} = A.$$

Ukážeme, že $A = 0$. Z rovnice $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$ plyne dalším derivováním, že

$$\mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}' = 0.$$

Odtud a ze vzorce $\mathbf{t}' = {}^2k\mathbf{n}$ si snadno ověříme, že $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}' = 0$, čili $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} = 0$ a $A = 0$.

Rovnice (6.23) má tedy tvar

$$\mathbf{b}' = - {}^2k \cdot \mathbf{n}. \quad (6.24)$$

Nazývá se *třetím Frenetovým* vzorcem. Umožňuje vyslovit definici:

Bud' k regulární křivka, popsána vektorovou rovnicí (6.11). Potom číslo 2k vypočtené pro daný bod $P(s)$ křivky k z rovnice (6.24) nazýváme *druhou křivostí* (torzí) křivky v jejím bodě $P(s)$.

Výpočet a geometrická interpretace druhé křivosti.

Nejprve je nutno ukázat, že pro druhou křivost 2k regulární křivky dané vektorovou rovnicí (6.11) resp. (6.15) platí vzorce:

$$|{}^2k| = |\mathbf{b}'|, \quad (6.25)$$

$${}^2k = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}, \quad (6.26)$$

$${}^2k = \frac{[\mathbf{p}', \mathbf{p}'', \mathbf{p}''']}{|\mathbf{p}'|^3} \quad (6.27)$$

$${}^2k = \frac{[\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}, \ddot{\ddot{\mathbf{p}}}]}{|\dot{\mathbf{p}} * \ddot{\mathbf{p}}|^2} \quad (6.28)$$

V rovnici (6.24) vynásobíme skalárně levou i pravou stranu samo sebou a tak dostaneme rovnici (6.25). Vynásobením - skalárním - rovnice (6.24) vektorem $\mathbf{n}$, dostaneme rovnici (6.26).

Důkaz:

Pro důkaz vztahu (6.27) musíme použít vztahů

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}''}{|\mathbf{p}'|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{p}' * \mathbf{p}''}{|\mathbf{p}'|^2}$$

Odtud a z (6.26) plyne, že

$${}^2k = \frac{\mathbf{p}' * \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{p}'''}{|\mathbf{p}'|^3}$$

Jednoduchou úpravou dostaneme vztah (6.27)

K odvození vztahu (6.28) použijeme vztah (6.27), který upravíme pomocí rovnic

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \frac{dt}{ds}, \quad \mathbf{p}'' = \ddot{\mathbf{p}} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{p} \frac{d^2t}{ds^2} \quad \text{a} \quad \mathbf{p}''' = \ddot{\ddot{\mathbf{p}}} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + A\ddot{\mathbf{p}} + B\dot{\mathbf{p}},$$

{A,B ... funkce, které není třeba počítat}

$$\frac{1}{|\mathbf{p}'|^3} = \frac{[\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}]}{|\dot{\mathbf{p}} * \ddot{\mathbf{p}}|^2}.$$

Dostaneme tak vztah

$${}^2k = \frac{[\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}, \ddot{\ddot{\mathbf{p}}}] \left(\frac{dt}{ds} \right)^6}{|\dot{\mathbf{p}} * \ddot{\mathbf{p}}|^2} [\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}]$$

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^6 = \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^6} = \frac{1}{[\dot{\mathbf{p}}, \ddot{\mathbf{p}}]} \quad \text{lze odvodit vztah (6.29)}$$

Frenetovy vzorce.

Předpokládejme, že pomocí vektorových funkcí

je v každém bodě $P(t)$ křivky k dané rovnicemi (6.11) definován doprovodný trojhran. V každém bodě $P(t)$ můžeme tedy vypočítat vektory $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}$ a $\dot{\mathbf{w}}$ a vyjádřit je jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$.

$$\dot{\mathbf{v}} = a_{21} \mathbf{u} + a_{22} \mathbf{v} + a_{23} \mathbf{w}$$

(6.29)

O doprovodném trojhranu platí věta:

Matice koeficientů v rozkladu (6.29) je antisymetrická, to je matice, která má tvar

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{array} \right\|$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= {}^1\mathbf{k}\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -{}^1\mathbf{k}\mathbf{t} + {}^2\mathbf{k}\mathbf{b} \quad \Leftarrow \text{Frenetovy vzorce.} \\ \mathbf{b}' &= -{}^2\mathbf{k}\mathbf{n} \end{aligned}$$



Kontrolní otázky 6.

1. Tečna křivky zadané obecným parametrem, obloukem, implicitně.
2. Vysvětlete pojem oskulační, normálová, rektifikační rovina.
3. Vysvětlete pojem první resp. druhé křivosti křivky.
4. Dejte příklad aplikace užití křivosti křivky.

7. OSKULAČNÍ KRUŽNICE



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- rovnice křivek definované délkou oblouku a křivostí
- definovat doprovodný trojhran prostorových křivek



Výklad

V počítačové grafice jsou často rovinné i prostorové křivky nahrazovány (po částech) úsečkami nebo oblouky. A to oblouky kruhovými nebo kuželosečkami (parabolou). Pro parametry těchto „náhradních“ křivek je třeba znát a) rovinu nahrazující křivky a b) poloměr kruhového oblouku. V této části jsou uvedeny prostředky, jak potřebné parametry získat. Za tím účelem je třeba znát některé další formy rovnic křivek.

7.1 Kanonické rovnice křivky

Vydeme z rovnice křivky $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ a z poznatku $\mathbf{p}' = \mathbf{t}$. Potom dalším derivováním průvodiče $\mathbf{p}(s)$ podle s a za použití Frenetových vzorců získáme $\mathbf{p}'' = \mathbf{t}' = {}^1k\mathbf{n}$ a dále potom

$$\mathbf{p}''' = {}^1k^2 \left[\frac{n'}{{}^1k} - n \left(\frac{1}{{}^1k} \right)' \right] = -{}^1k^2 \mathbf{t} + {}^1k' \mathbf{n} + {}^1k^2 k \mathbf{b}.$$

Pro $\mathbf{p}(s)$ použijeme rozvoje v mocninou řadu v okolí bodu $s = 0$. To je v okolí $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ tedy

$$\mathbf{p} \approx \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}'_0 s + \frac{1}{2} \mathbf{p}''_0 s^2 + \frac{1}{6} \mathbf{p}'''_0 s^3 + \dots \quad (7.1)$$

Dosadíme-li za $\mathbf{p}'_0$, $\mathbf{p}''_0$, $\mathbf{p}'''_0$. . . právě nalezené výrazy a ztotožníme v bodě $s = 0$ zkoumáním křivky

vektory $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}_0$ se souřadnicovými vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ dostaneme výraz

$$\mathbf{p} \approx \mathbf{t}_0 s + \frac{1}{2} {}^1k_0 \mathbf{n}_0 s^2 + \frac{1}{6} s^3 \left[-{}^1k_0^2 \mathbf{t}_0 + {}^1k'_0 \mathbf{n}_0 + {}^1k_0^2 k_0 \mathbf{b}_0 \right] + \dots$$

Po uspořádání dle $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}_0$ dostaneme

$$p \llcorner \mathbf{t}_0 \left(s - \frac{1}{6} {}^1k_0^2 s^3 + \dots \right) + \mathbf{n}_0 \left(\frac{1}{2} {}^1k_0 s^2 + \frac{1}{6} {}^1k_0' s^3 + \dots \right) + \mathbf{b}_0 \left(\frac{1}{6} {}^1k_0^2 {}^2k_0 s^3 + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} x \llcorner &= s - \frac{1}{6} {}^1k_0^2 s^3 - \frac{s^4}{4!} \left(3 {}^1k_0 {}^1k_0' \right) + \dots \\ y \llcorner &= \frac{1}{2} {}^1k_0 s^2 + \frac{1}{6} {}^1k_0' s^3 - \frac{s^4}{4!} \left({}^1k_0'' - {}^1k_0^3 - {}^1k_0 {}^2k_0^2 \right) + \dots \\ z \llcorner &= \frac{1}{6} {}^1k_0 {}^2k_0 s^3 + \frac{s^4}{4!} \left[{}^1k_0 {}^2k_0' + {}^1k_0' {}^2k_0 \right] + \dots \end{aligned} \quad (7.2)$$

Rovnice (7.2) jsou tzv. **kanonické rovnice** křivky v okolí jejího bodu $s = 0$. Předpokladem je konvergence uvedených řad. Známe-li první a druhou křivost jako dané funkce argumentu s , dále spojitě funkce ${}^1k \llcorner$ a ${}^2k \llcorner$ jsou známy, pak stanovením počáteční polohy doprovodného trojhranu $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ je křivka jednoznačně určena. Z kanonického tvaru lze snadno poznat kolmé průměty křivky do rovin průvodního trojhranu v okolí zkoumané křivky. Dále je patrné přiblížení nahrazované křivky dle počtu uvažovaných členů rozvoje. Použijeme-li pouze prvního členu každého rozvoje, je křivka v okolí bodu nahrazena parabolou. Ve druhém přiblížení jde o kubickou (prostorovou) parabolu a pod.

Poznámka: Druhá křivost křivek "definuje" pravo - levotočivost křivek.

${}^2k > 0 \dots$ pravotočivá; ${}^2k < 0 \dots$ levotočivá.

7.2 Přirozené rovnice křivky

Z předcházejícího (7.2) plyne, že známe-li funkce

$${}^1k = {}^1k \llcorner \text{ a } {}^2k = {}^2k \llcorner, \quad (7.3)$$

které jsou spojitě a diferencovatelné do potřebných řádů je, až na určení polohy v prostoru, jednoznačně určena křivka, která má 1k za svoji první a 2k za svoji druhou křivost. Veličiny s , 1k a 2k nazýváme **přirozenými souřadnicemi** a rovnice (7.3), tj. ${}^1k = {}^1k \llcorner$ a ${}^2k = {}^2k \llcorner$ mezi 1k , 2k a s nazýváme **přirozenými rovnicemi křivky**. Přirozené proto, že nezávisí na volbě souřadné soustavy.

Obecná formulace (bez důkazu) tohoto problému :

Jsou dány dvě spojitě funkce ${}^1k = {}^1k \llcorner > 0$ a ${}^2k = {}^2k \llcorner$, kde 1k má spojitou nejméně druhou a 2k má spojitou nejméně první derivaci. Potom existuje jediná křivka těchto vlastností :

1. má s za oblouk a 1k a 2k za první a druhou křivost;
2. prochází libovolným, předem daným bodem $s = 0$;
3. má v tomto bodě libovolné, předem dané jednotkové a vzájemně kolmé vektory

$\mathbf{t}_0$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}_0$ za jednotkové vektory tečny, hlavní normály a binormály.

Lze napsat (opět bez důkazu), že rovnice rovinné křivky o první křivosti ${}^1k = {}^1k(s)$, (${}^2k = 0$) je možno vždy napsat ve tvaru :

$$\left. \begin{aligned} x &= \int \cos \left(\int {}^1k ds + c \right) ds + a_1 \\ y &= \pm \int \sin \left(\int {}^1k ds + c \right) ds + a_2 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

kde a_1, a_2, c jsou libovolné reálné konstanty.

Nechť $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = 0$, jsou rovnice hledané rovinné křivky.

Potom je

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = x'^2 + y'^2 = 1$$

a lze tedy položit

$$x' = \cos \varphi(s), \quad y' = \sin \varphi(s). \quad (7.41)$$

Následkem toho lze psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' \cdot \mathbf{t}' = {}^1k \mathbf{n} \cdot {}^1k \mathbf{n} = {}^1k^2 = x''^2 + y''^2 &= \sin^2 \varphi(s) [\varphi'(s)]^2 + \cos^2 \varphi(s) [\varphi'(s)]^2 = [\varphi'(s)]^2 \\ &\Rightarrow {}^1k(s) = \pm \varphi'(s) \end{aligned}$$

kde

$$\varphi(s) = \pm \int {}^1k(s) ds + c. \quad (7.42)$$

Poznámka: Znaménko $\pm$ dává dvě křivky souměrné dle osy x .

Dosazením (7.42) do (7.41) a provedením příslušné integrace dostaneme právě rovnice (7.4).

Opačně pak lze ukázat, že pro křivku (7.4) je skutečně ${}^1k(s)$ první křivostí. Tímto je platnost uvedené věty se vzorcí (7.4) dokázána.

Zvolme $a_1 = a_2 = c = 0$ dostaneme z rovnic (7.4) rovnice

$$\underline{x} = \int \cos \left(\int {}^1k ds \right) ds, \quad \underline{y} = \pm \int \sin \left(\int {}^1k ds \right) ds, \quad \underline{z} = 0. \quad (7.43)$$

Použití známých vzorců z trigonometrie pro $\cos(\alpha + \beta)$ a $\sin(\alpha + \beta)$ na první dvě rovnice vztahu (7.4) nám umožňuje tyto přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} x &= \cos c \int \cos \left(\int {}^1k ds \right) ds - \sin c \int \sin \left(\int {}^1k ds \right) ds + a_1, \\ y &= \cos c \int \sin \left(\int {}^1k ds \right) ds + \sin c \int \cos \left(\int {}^1k ds \right) ds + a_2. \end{aligned}$$

Přepíšeme-li tyto rovnice dle (7.43), můžeme rovnice (7.4) vyjádřit ve tvaru

$$x = \underline{x} \cos c - \underline{y} \sin c + a_1, \quad y = \underline{x} \sin c + \underline{y} \cos c + a_2, \quad z = 0.$$

Z těchto rovnic je patrné, že všechny rovinné křivky ($z = 0$) o stejné první křivosti ${}^1k(s)$ v bodě s dostaneme z některé z křivek (7.43) otočením o úhel c a posunutím podél orientované úsečky dané vektorem $\mathbf{a}(a_1, a_2)$.

Příklad 1.

Určete parametrické rovnice křivky, jejíž přirozené rovnice jsou

$$^1k = \frac{1}{|r|}, \quad ^2k = 0, \quad (7.5)$$

kde $r > 0$ je daná reálná konstanta.

Křivka leží v rovině $z = 0$, prochází bodem $[0,0]$ a má v tomto bodě tečnu v kladné ose x .

Hledané rovnice této křivky jsou $x = x(s)$, $y = y(s)$, $[z(s) = 0]$.

Potom lze ze vztahu $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = x'^2 + y'^2 = 1$ psát dle 7.41

$$x' = \cos \varphi, \quad y' = \sin \varphi \Rightarrow \\ x''(s) = -\sin \varphi(s) \cdot \varphi'(s), \quad y''(s) = \cos \varphi(s) \cdot \varphi'(s)$$

Dosadíme (a vypočteme) do vztahu pro první křivost (viz (6.22))

$$^1k = \frac{\ddot{x}y - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\ddot{x}y - \dot{x}\ddot{y}}{1}$$

Po dosazení dostaneme $^1k = \frac{1}{r} \sqrt{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = |\varphi'|$

a odtud po integraci $\varphi = \int \frac{1}{r} ds + c$

bude tedy

$$x = \int \cos \left(\frac{1}{r} s + c \right) ds + a, \quad y = \int \sin \left(\frac{1}{r} s + c \right) ds + b.$$

Po integraci

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \sin \left(\frac{1}{r} \cdot s + c \right) + a, \quad y = -r \cdot \cos \left(\frac{1}{r} \cdot s + c \right) + b. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Z těchto rovnic po eliminaci parametru s dostaneme

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Což je rovnice kružnice o středu $S[a,b]$ a poloměru r . Zbývá tedy určit integrační konstanty tak, aby rovnice vyhovovala zadaným podmínkám.

Tečna, normála :

$$\begin{aligned} t_x &= 1 = x' = \cos \left(\frac{1}{r} \cdot s + c \right), \\ t_y &= 0 = y' = \sin \left(\frac{1}{r} \cdot s + c \right), \\ n_x &= 0 = r x'' = -\sin \left(\frac{1}{r} \cdot s + c \right), \\ n_y &= 1 = r y'' = -\cos \left(\frac{1}{r} \cdot s + c \right). \end{aligned}$$

Z rovnic pro t_x a t_y a pro n_x a n_y je $\frac{1}{r} s + c = 0$. Pro oblouk s z bodu $[0,0]$, pro který je $s_0 = 0$,

dostaneme z poslední rovnice $c = 0$. Z rovnic (7.6) dostaneme

$$x(0) = a, \quad y(0) = -r + b = 0, \quad \text{tj. } b = r.$$

Parametrické rovnice křivky s přirozenými rovnicemi (7.5) při daných počátečních podmínkách jsou

$$x(s) = r \cdot \sin \frac{s}{r}, \quad y(s) = r \cdot \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right).$$

V implicitním tvaru je potom $x^2 + y^2 - 2ry = 0$.

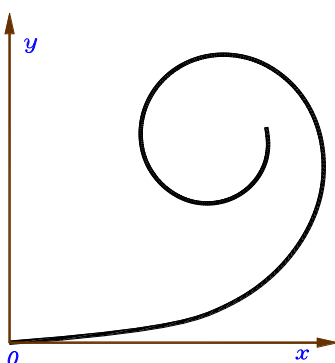
Příklad 2. Zobrazte křivku, její první křivost 1k je přímo úměrná délce oblouku s . Přirozené rovnice křivky

(klotoidy) jsou $^1k = \frac{s}{a^2}$, $^2k = 0$ (a je reálné).

Při vhodné volbě soustavy souřadnic lze kartézské souřadnice bodů klotoidy vyjádřit tzv. *Fresnelovými integrály*.

$$x(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi, \\ y(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi,$$

kde $\varphi = \frac{2a^2}{s^2}$ je úhel tečny křivky v jejím bodě $[x,y]$ se souřadnicovou poloosou $+x$.



Obr.7.1

7.3 Styk křivek, oskulační kružnice

Nechť jsou dány dvě křivky k_1 k_2 o rovnicích

$$^1\mathbf{p} = ^1\mathbf{p}(s) \quad \text{a} \quad ^2\mathbf{p} = ^2\mathbf{p}(s), \quad (7.7)$$

vztahené k jednomu parametru s , který je obloukem na obou křivkách, a mají společný bod (regulární na obou křivkách) $s = 0$, tj. platí $^1\mathbf{p}_0 = ^2\mathbf{p}_0$, od kterého budeme počítat parametr s na obou křivkách. Na každé z těchto křivek uvažujeme bod, který přísluší k téže hodnotě parametru s a zkoumáme vzájemnou polohu křivek v

dostatečně malém okolí jejich společného bodu $s = 0$. Říkáme, že křivky ${}^1\mathbf{p} = {}^1\mathbf{p}(s)$ a ${}^2\mathbf{p} = {}^2\mathbf{p}(s)$ mají ve společném bodě ${}^1\mathbf{p}_0 = {}^2\mathbf{p}_0$ *styk (dotyk) nejméně q -tého řádu*. Neboli *styk (dotyk) nejméně $(q+1)$ bodový*, jestliže jsou splněny rovnice

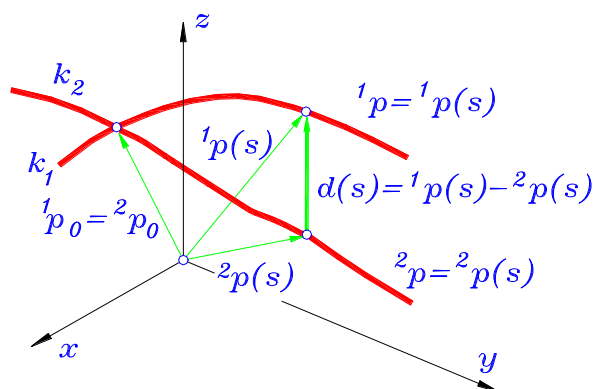
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(s)}{s^p} = 0 \quad \text{pro } (p = 0, 1, 2, \dots, q), \quad (7.8)$$

kde $d(s) = {}^1\mathbf{p}(s) - {}^2\mathbf{p}(s)$.

Lze vyslovit větu: Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky (7.8) měly ve společném bodě styk nejméně q -tého řádu, tj. styk nejméně $(q+1)$ bodový, je splnění rovnic

$${}^1\mathbf{p}_0 = {}^2\mathbf{p}_0, {}^1\mathbf{p}'_0 = {}^2\mathbf{p}'_0, \dots, {}^1\mathbf{p}^{(q)}_0 = {}^2\mathbf{p}^{(q)}_0 \quad (7.9)$$

za předpokladu existence příslušného počtu derivací.



Obr. 7.2

Oskulační kružnice

Budeme-li předpokládat, že první křivost ${}^1k \neq 0$ definujeme:

Kružnice, která prochází bodem křivky $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$, v němž ${}^1k \neq 0$, a má v tomto bodě styk nejméně **druhého** řádu (trojbodový dotyk), se nazývá **oskulační kružnice (kružnice křivosti)** v daném bodě. Střed této kružnice se nazývá **středem křivosti** a její poloměr je **poloměrem křivosti** zkoumané křivky v daném bodě.

Zde platí dvě věty.

1) Oskulační kružnice v bodě křivky leží v oskulační rovině křivky v tomto bodě, a její poloměr se rovná příslušnému poloměru 1r první křivosti a její střed S má průvodič

$$\boxed{\mathbf{s} = \mathbf{p} + {}^1r \mathbf{n}} \quad (7.10)$$

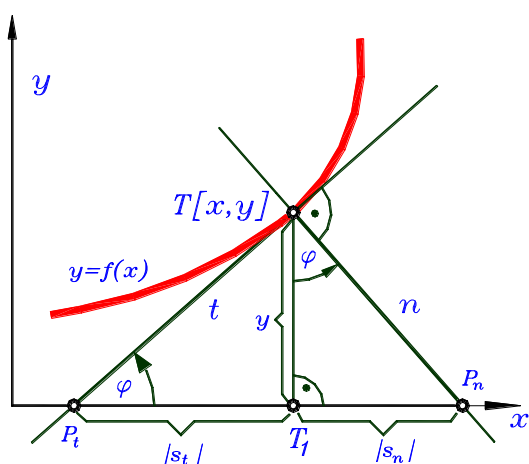
[$\mathbf{p}(s)$ je průvodič bodu dané křivky], tj. leží na hlavní normále křivky v uvažovaném bodě.

2) Pravoúhlý průmět křivky do její oskulační roviny v uvažovaném bodě je rovinná křivka, která má s danou křivkou ve zmíněném bodě společnou oskulační kružnici.

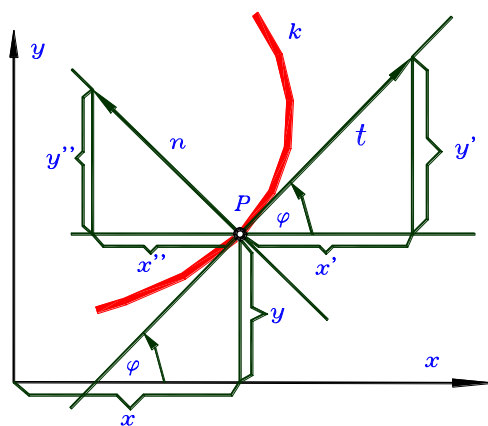
Oskulační kružnice rovinné křivky

Vyjdeme z předpokladu, že druhá křivost ${}^2k = 0$. Dále budeme používat pouze k na místo 1k a r místo 1r pro první křivost. Nechť je tedy křivka dána rovnicí $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ v rovině $z = 0$. Pro směrové kosiny jednotkového tečného vektoru $\mathbf{t}$ potom platí

$$x' = \cos \varphi, \quad y' = \sin \varphi, \quad z' = 0. \quad (7.11)$$



Obr. 7.3



Obr. 7.4

Pro směrové kosiny normály (máme na mysli hlavní normálu; pojem binormály u rovinných křivek nezavádíme) platí :

$$\left. \begin{aligned} r x'' &= \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \varphi = -y', \\ r y'' &= \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \varphi = x', \\ r z'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Vyjdeme-li z Frenetových vzorců

$$\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}' = -k\mathbf{t}$$

pro náš případ rovinných křivek dostaneme výrazy

$$\left. \begin{aligned} x'' &= -ky' \\ y'' &= kx' \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

U těchto rovinných křivek místo průvodního **trojhranu** je používáno pojmu **dvojhran** tvořeného tečnou a normálou.

Na obrázku číslo 7.3 je zaveden pojem **subtangenty** s_t a **subnormály** s_n . Pro konstrukci oskulační kružnice platí následující věty :

3) Křivka $y = y(x)$ má v bodě $[x,y]$, pro který platí $\ddot{y} \neq 0$ (tj. jsou vyloučeny inflexní body), oskulační kružnici, jejíž poloměr r a souřadnice s_x, s_y středu jsou dány výrazy

$$r = \frac{1 + \dot{y}^2}{|\ddot{y}|}, \quad x_s = x - \dot{y} \frac{1 + \dot{y}^2}{\ddot{y}}, \quad y_s = y + \frac{1 + \dot{y}^2}{\ddot{y}} \quad (7.14)$$

4) Křivka o rovnici $F(x,y) = 0$ má ve svém bodě $[x,y]$ oskulační kružnici, jejíž poloměr (poloměr křivosti) r a souřadnice x_s, y_s středu S jsou dány výrazy

$$r = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}{|J|}, \quad x_s = x - F_x \frac{F_x^2 + F_y^2}{J}, \quad y_s = y - F_y \frac{F_x^2 + F_y^2}{J}, \quad (7.15)$$

kde

$$J = F_{xx} F_y^2 - 2 F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2 \neq 0. \quad (7.16)$$

Kde $F_x = \frac{\delta F}{\delta x}$, $F_y = \frac{\delta F}{\delta y}$, $F_{xy} = \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y}$, $F_{xx} = \frac{\delta^2 F}{\delta x^2}$ a $F_{yy} = \frac{\delta^2 F}{\delta y^2}$.

Při aplikaci této věty předpokládáme, že daná křivka nemá v bodě $[x,y]$ tečnu rovnoběžnou s osou y .

5) Křivka o rovnici $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ má ve svém bodě $[x(t), y(t)]$ oskulační kružnici, jejíž poloměr (poloměr křivosti) r a souřadnice x_s, y_s středu S jsou dány výrazy.

$$r = \frac{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2)^{3/2}}{|\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi}|}, \quad x_s = \varphi - \dot{\psi} \frac{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi}}, \quad y_s = \psi - \dot{\varphi} \frac{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi}},$$

kde $\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi} \neq 0$.

6) V bodě $[x,y]$ křivky $y = y(x)$, pro který platí $3\dot{x}\ddot{y} - (1 + \dot{y}^2)\ddot{\ddot{y}} = 0$,

má oskulační kružnice s křivkou styk řádu nejméně třetího (čtyřbodový), tj. kružnice je **kružnicí hyperoskulační**.

Příklad 3. Pro parabolu $y^2 = 2px$

získáme $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$,

$$\text{a} \quad \ddot{y} = -\frac{\dot{y}^2}{y} = -\frac{p^2}{2px\sqrt{2px}} = -\frac{p}{2x\sqrt{2px}} = -\frac{\sqrt{2px}}{4x^2}$$

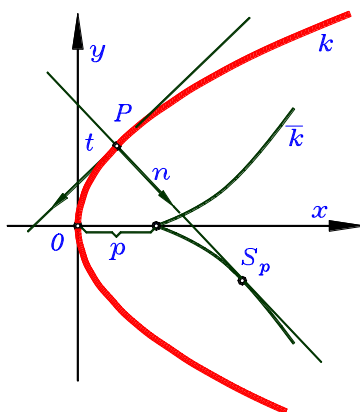
Podle (7.14) dostaneme souřadnice x_s a y_s středu kružnic křivosti v bodě P paraboly.

$$x_s = p + 3x \quad \text{a} \quad y_s = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Dosadíme-li tyto rovnice pro souřadnice středu do rovnice dané paraboly k dostaneme rovnici **evoluty** $\bar{k}$ této křivky k .

$$y^2 = \frac{8}{27} p \left(\sqrt[3]{k - p} \right)^3$$

Evoluta $\bar{k}$ dané paraboly se nazývá *semikubická parabola (Neilova)*. Viz obrázek 7.5.



Obr. 7.5



Kontrolní otázky 7.

1. Vysvětlete pojem přirozené rovnice křivky.
2. Vysvětlete kanonické rovnice křivky.
3. Vysvětlete pojem styk křivek. Oskulační kružnice.

8. KŘIVKY. EVOLVENTY, EVOLUTY



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- technické křivky používané v technické praxi
- definovat a tvořit technické křivky



Výklad

V technické praxi se vyskytují křivky, které jsou náplní této kapitoly. Ve stavebnictví se využívají křivky rovnoběžné – ekvidistanty, ve strojírenství jsou využívány kinematické křivky – kotálnice apod.

8.1 Křivky rovnoběžné

Dvojice křivek k a k , které mají společné hlavní normály $\mathbf{n}$ se nazývají **párem rovnoběžných křivek** (Bertrandovy křivky).

Pozn.: V grafických systémech jsou používány převážně rovinné a užívá se názvu *ekvidistantní křivky*.

Pro rovnoběžné křivky platí základní věta:

Je-li $\mathbf{p}(s)$ jedna křivka páru, potom druhá má rovnici

$$\bar{\mathbf{p}}(s') = \mathbf{p}(s) + a\mathbf{n}(s). \quad (a = \text{konstanta}) \quad (8.1)$$

Důkaz.

Jestliže křivky $\mathbf{p}(s)$ a $\bar{\mathbf{p}}(s)$ tvoří Bertrandův pár, potom podle definice musí vektor $\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$ ležet na hlavní normále v příslušném bodu křivky $\mathbf{p}(s)$. Existuje tedy taková funkce $a(s)$, že je

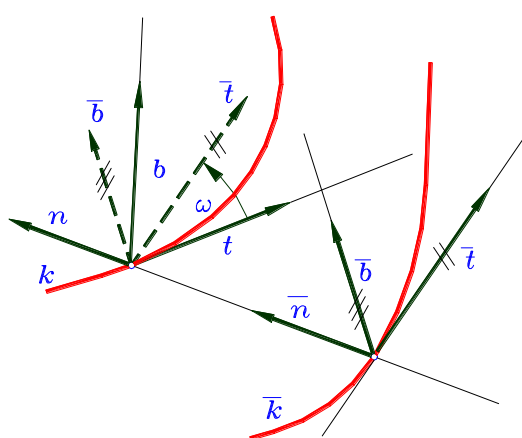
$$\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p} = a(s')\mathbf{n}, \quad \text{tj.} \quad \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + a(s')\mathbf{n}. \quad (8.2)$$

Derivováním dle s a použitím Frenetových vzorců získáme

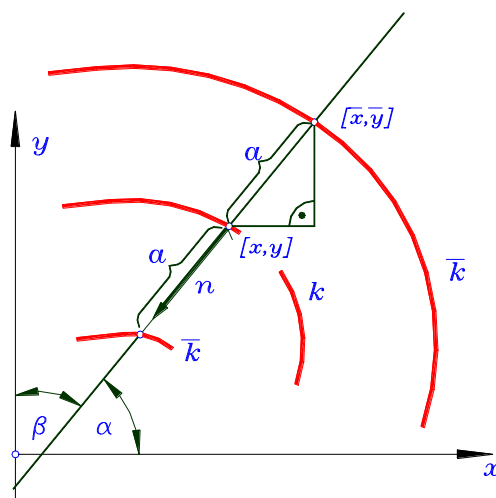
$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{ds} = (1 - a'k)\mathbf{t} + a'\mathbf{n} + a^2k\mathbf{b}$$

Zde je třeba si uvědomit, že oblouky křivek k a $\bar{k}$ odpovídající stejnému parametru s nemusí být stejné. Tečný vektor $\dot{\bar{\mathbf{p}}} = \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{ds}$ však musí být (dle předpokladu) kolmý na $\mathbf{n}$, musí tedy (po vynásobení výrazu $\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{ds}$ skalárně vektorem $\mathbf{n}$ platit $\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{ds} \cdot \mathbf{n} = a' \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$. Integrací dostaneme $a = \text{konstanta}$. Cbd.

Tímto můžeme taktéž vyslovit větu: Křivky Bertrandova typu vytínají na společných hlavních



Obr. 8.1



Obr. 8.2

normálách úsečky stejné délky a .

Na obr. 8.1 jsou znázorněny dvě křivky k a $\bar{k}$, které mají společnou normálu $\mathbf{n}$. Označíme úhel tečny $\mathbf{t}$ křivky k s jednotkovým tečným vektorem $\bar{\mathbf{t}}$ křivky $\bar{k}$ v bodě se společnou normálou $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{n}}$ znakem ω . Vektor $\bar{\mathbf{t}}$ lze vyjádřit

$$\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \cdot \cos \omega + \mathbf{b} \cdot \sin \omega. \quad (8.3)$$

Derivací tohoto výrazu získáme:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d\bar{\mathbf{t}}}{ds} \cdot \frac{d\bar{s}}{ds} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{t} \cdot \cos \omega - \mathbf{b} \cdot \sin \omega) + \mathbf{t} \frac{d \cdot \cos \omega}{ds} + \mathbf{b} \frac{d \cdot \sin \omega}{ds}$$

(Všechny veličiny křivky $\bar{k}$ jsou označeny pruhem.)

Předpokladem rovnoběžnosti křivek je shoda hlavních normál $\mathbf{n}$ a $\bar{\mathbf{n}}$, musí být $\omega =$ konstantní. Vektory $\bar{\mathbf{t}}$ a $\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{ds}$ jsou shodně orientovány,

a tedy z $\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{ds} = (1 - a'k) \mathbf{t} + a'k \mathbf{b}$ a (8.3) plyne

$$\begin{vmatrix} 1-a^1k & a^2k \\ \cos\omega & \sin\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Lineární rovnice mezi první a druhou křivostí dané křivky k lze tedy napsat ve tvaru

$$a^1k \cdot \sin\omega + a^2k \cdot \cos\omega = \sin\omega, \quad (8.4)$$

kde a a ω jsou konstanty. Pro $\omega = 0$ ($= \pi$) buď $a = 0$, nebo $^2k = 0$... jde o rovinnou křivku.

Případ $a = 0$ lze vyloučit (šlo by zde o totožné - splývající křivky). Potom tedy pro $\omega \neq 0$ ($\neq \pi$) z rovnice (8.4) dostaneme

$$a^1k + a^2k \cdot \cotg\omega = 1.$$

Jestliže dosadíme $b = a \cdot \cotg\omega$, dostaneme výraz

$$a^1k + b^2k = 1. \quad (8.5)$$

Tato podmínka musí být splněna pro každou křivku Bertrandova páru. Dále lze dokázat:

Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivka $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ mohla být jednou z křivek

Bertrandova páru, je splnění rovnice

$$^2k = 0 \text{ (pro rovinné křivky), nebo } a^1k + b^2k = 1, \text{ kde } a \text{ a } b \text{ jsou konstanty.}$$

Druhá křivka Bertrandova typu je potom dána rovnicí (8.1).

Z obrázku 8.2 je patrné, že rovinná křivka $\bar{k}$ ekvidistantní ke křivce k je vyjádřena parametricky

$$\bar{x} = x \pm a \cdot \cos \alpha, \quad \bar{y} = y \pm a \cdot \cos \beta,$$

kde α, β jsou směrové úhly normály $\mathbf{n}$ křivky k .

Ze vztahu $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ pro směrové kosiny přímky dostaneme

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2}}, \quad \cos \beta = -\frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2}},$$

$$\text{kde } \bar{x} = \bar{x}(t) \text{ a } \bar{y} = \bar{y}(t) = \bar{y},$$

Z těchto rovnic a z rovnic pro x a y potom dostaneme

$$\bar{x} = \varphi(t) \pm a \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2}}, \quad \bar{y} = \psi(t) \pm a \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2}} \quad (8.6)$$

což jsou parametrické rovnice ekvidistantní křivky $\bar{k}$ ke křivce k .

Ke křivce zadané $F(x, y) = 0$ rovnicí ekvidistanty získáme eliminací x, y z rovnic

$$F(x, y) = 0, \quad \bar{y} - y = -\frac{dx}{dy} \cdot (\bar{x} - x) \quad \text{a} \quad (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 = a^2,$$

kde a je libovolná reálná konstanta.

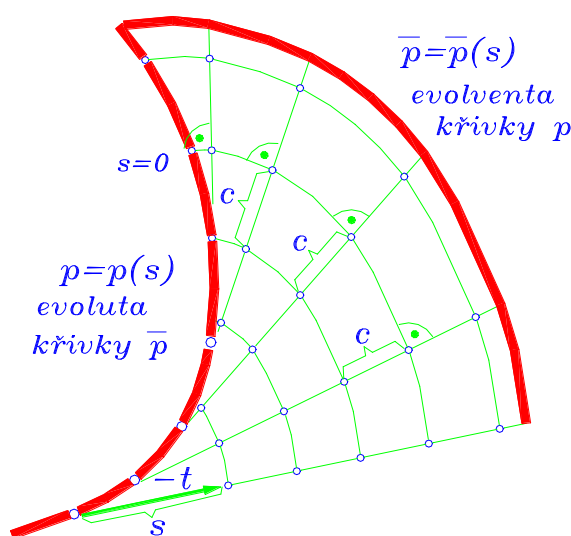
8.2 Evolventy a evoluty

Křivka $\bar{k}$, která protíná kolmo všechny tečny dané křivky $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ (a leží tedy na tzv. ploše tečen této křivky), se nazývá **evolventou** dané křivky k . Křivku $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ potom nazýváme **evolutou** křivky $\bar{k}$. Dle tohoto lze odvodit rovnici evolventy. (Obrázek 8.3.)

Mějme rovnici evoluty $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$, potom rovnici evolventy můžeme napsat ve tvaru

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - u\mathbf{t}, \quad \text{kde } u = s + c \quad (8.7)$$

(c je libovolná reálná konstanta.)



Obr. 8.3

Ke každé evolutě existuje nekonečně mnoho evolvent (záleží právě na konstantě c). Budeme řešit opačnou úlohu. A to hledáme k dané křivce evolutu. Můžeme evolutu hledat jako geometrické místo středů křivosti dané křivky (v rovině). Lze ukázat, že obecná rovnice evoluty k dané křivce má tvar:

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(s) \Rightarrow \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(s) + \int \mathbf{n} + \mathbf{b} \cdot \cotg \left(\int^2 k ds + c \right), \quad (8.8)$$

kde c je libovolná integrační konstanta; a $\mathbf{p} = \mathbf{p}(s)$ je rovnice dané křivky.

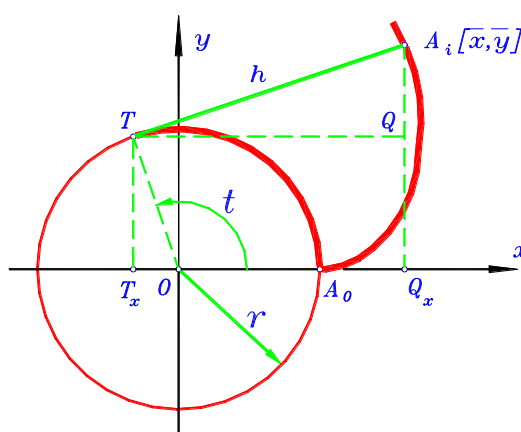
$$\text{Pro křivky v rovině platí: } \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \int \mathbf{n}. \quad (8.9)$$

Evolventa kružnice

Příklad 1: Vytvořte evolventu základní kružnice danou $k(S[0,0],r)$. Evolventu tvoří bod $A_i[r, 0]$. Parametrické rovnice (pro tento případ) jsou $x = r \cdot \cos t + r t \cdot \sin t$,

$$y = r \cdot \sin t - r t \cdot \cos t,$$

kde t je úhel osy x a poloměru p kolmého k poloze přímky h . (Viz. obr. 8.4.) Odvození rovnic evolventy je zřejmé z obrázku.



Obr. 8.4

Platí: $A_0 T = A_i T$, tedy $A_i T = rt$.

$$\bar{x} = T_x Q_x - T_x 0 = r t \cdot \sin(2\pi - t) - r \cdot \cos(2\pi - t)$$

$$\bar{x} = r(t \cdot \sin t + \cos t) \quad (8.10)$$

$$\bar{y} = Q_x Q + Q A_i = r \cdot \sin(2\pi - t) + r t \cdot \cos(2\pi - t) \quad \bar{y} = r(\sin t - t \cdot \cos t). \quad (8.11)$$

Rovnice (8.10), (8.11) jsou parametrické rovnice evolventy kružnice.

Cyklické křivky

Křivky, které vznikají odvalováním - kotálením - se nazývají cykloidy - kotálnice.

Pevná polodie - základní křivka - pevná - po které se kotálí **hybná polodie** - tvořící křivka cykloidy. Je-li pevná polodie přímkou - jde o **cykloidy prosté**. (Obr. 8.5)

Rovnice jsou $x = r \cdot (t - \sin t)$, $y = r \cdot (1 - \cos t)$,

kde r je poloměr tvořící kružnice; t úhel odpovídající délce oblouku kotálející se kružnice.

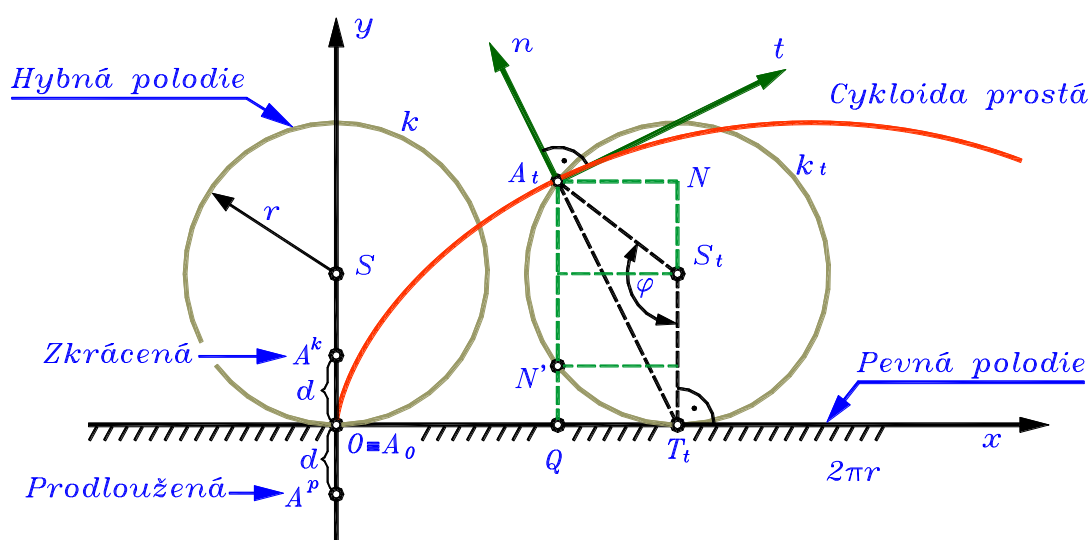
$$\text{Pro } d \neq r \quad x = r t - d \cdot \sin t \quad \text{a} \quad y = r - d \cdot \cos t.$$

Je-li pevnou polodií kružnice, jde o epicykloidy nebo hypocykloidy. Záleží na tom, jestli hybná polodie (také kružnice) je odvalována vně nebo uvnitř pevné polodie.

Parametrické rovnice těchto křivek jsou

$$x = (R \pm r) \cdot \cos t \mp r \cdot \cos \frac{R \pm r}{r} \cdot t, \quad y = (R \pm r) \cdot \sin t \mp r \cdot \sin \frac{R \pm r}{r} \cdot t, \quad (8.12)$$

kde R je poloměr pevné polodie, r je poloměr hybné polodie; horní znaménko platí pro epicykloidy; dolní platí pro hypocykloidy.



Obr. 8.5

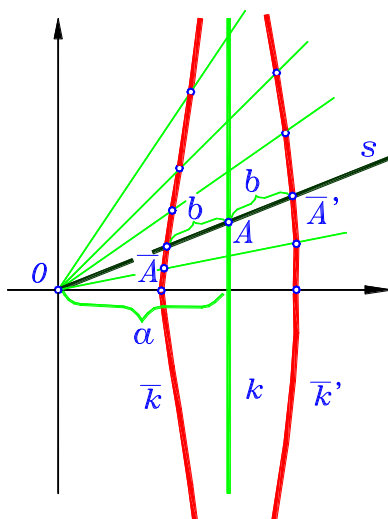
Obrázek je kreslen pro $d = 0$. Je-li $d < 0$, jde o zkrácenou cykloidy; je-li $d > 0$, dostaneme prodlouženou cykloidy.

Konchoidální křivky

Na obrázku 8.6 je zobrazena křivka, která vznikne takto:

Je dán pevný bod O a křivka k . Bodem O vedeme libovolnou sečnu a . Tato (libovolná) sečna s protne křivku k v bodě A .

Od tohoto bodu A na sečně s najedeme body $\bar{A}$ a $\bar{A}'$, tak že platí $\bar{A}A = A\bar{A}' = b$.



Obr. 8.6

Body $\bar{A}$ a $\bar{A}'$ tvoří **konchoidy**

$\bar{k}$ a $\bar{k}'$ křivky k .

Je-li křivkou k přímka, jde o známou **Nikomedovu konchoidu**. Na obr. 8.6 je zvolena přímka $x = a$, sečny procházejí pevným bodem - pólem - počátkem O . Rovnice (v pravoúhlých - Kartézských souřadnicích) jsou

$$(x^2 + y^2) \cdot (x - a)^2 - b^2 x^2 = 0$$

Je-li pevnou křivkou k kružnice a pevný bod O (počátek) leží na kružnici, jejíž střed leží na ose x , je **konchoidou** této kružnice tzv. **Pascalova závitnice**.

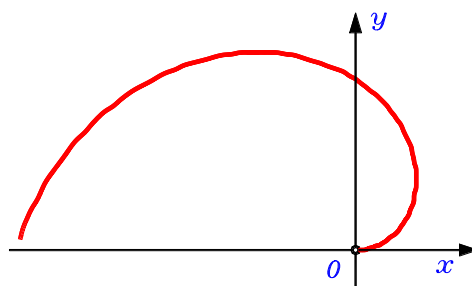
Rovnice v pravoúhlých souřadnicích $(x^2 + y^2 - a x)^2 - b^2 \cdot (x^2 + y^2) = 0$.

Spirály

Složením dvou pohybů - rotačního a přímočarého - vzniká spirálový pohyb. Bod, který spirálu vytváří, se pohybuje po přímce, která se otáčí okolo svého bodu. Parametrické rovnice obecně formulované spirály, kde rotačním bodem přímky je počátek souřadnice, jsou:

$$x = \rho(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi,$$

kde pro parametr φ není omezení.



Obr. 8.7

Rovnice spirál: Archimédova: $\rho = a\varphi$, kde a je libovolná konstanta $\neq 0$. (Obrázek 8.7)

Složením dvou pohybů - rotačního a přímočarého - vzniká spirálový pohyb. Bod, který spirálu vytváří, se pohybuje po přímce, která se otáčí okolo svého bodu. Parametrické rovnice obecně formulované spirály, kde rotačním bodem přímky je počátek souřadnice, jsou:

$$x = \rho(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi,$$

kde pro parametr φ není omezení.

Rovnice spirál: Archimédova: $\rho = a\varphi$, kde a je libovolná konstanta $\neq 0$. (Obrázek 8.7)

Logaritmická: $\rho = ae^{b\varphi}$,

kde $a > 0$, $b > 0$ jsou konstanty, φ je úhel průvodiče (v obloukové míře) s polární osou, e je základem přirozených logaritmů.



Kontrolní otázky 8.

1. Vysvětlíte pojem rovnoběžných křivek v prostoru, v rovině.
2. Popište evolventy a evoluty.
3. Popište cykloidy.
4. Popište konchoidy a spirály.

9. PLOCHY



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete znát

- typy ploch, jejich vlastnosti a parametry
- definovat plochy
- řešit úlohy na plochách



Výklad

Plochy v počítačové grafice se zadávají rovnicemi ploch. A dále jednotlivými prvky ploch – tvořícími křivkami, které rotují nebo jsou posouvány dle vektorů nebo jiných křivek. V této kapitole jsou uvedeny jednak rovnice nejčastěji učívaných ploch a dále jsou zde plochy, které se využívají v technické praxi.

9.1 Rovnice ploch

Zavedeme toto označení :

- E trojrozměrný euklidovský prostor;
- X bod v tomto prostoru ;
- $X = [x, y, z]$ přiřazení bodu X souřadnicím x, y a z ;
- $\mathbf{x} = (x, y, z)$ průvodní vektor bodu X .

Mějme tři funkce

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v), \end{aligned} \tag{9.1}$$

kde proměnné u, v splňují tyto předpoklady :

- a) Funkce (9.1) jsou reálné funkce dvou proměnných definované na společné oblasti Ω .
- b) Ve všech bodech oblasti Ω jsou tyto funkce (9.1) spojité a mají spojité všechny parciální derivace až do třetího řádu.
- c) Ve všech bodech oblasti Ω má matice

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\delta x}{\delta u}, & \frac{\delta y}{\delta u}, & \frac{\delta z}{\delta u}, \\ \frac{\delta x}{\delta v}, & \frac{\delta y}{\delta v}, & \frac{\delta z}{\delta v}, \end{array} \right\| \quad (9.2)$$

hodnost rovnou dvěma.

d) Dvěma různým bodům oblasti Ω přiřadí funkce (9.1) dva různé body v prostoru E_3 .

Jestliže jsou splněny tyto předpoklady, potom množinu všech bodů $X \in E_3$, jejichž souřadnice x, y a z jsou dány rovnicemi (9.1) nazýváme **regulární plochou** (stručně **plochou**). Rovnice (9.1) nazýváme **parametrickými rovnicemi** této plochy.

Každá regulární plocha je určena svými parametrickými rovnicemi (9.1). Stručnější vyjádření plochy lze zapsat pomocí vektorové rovnice. Bodu $[u, v]$ z oblasti Ω odpovídá na ploše příslušný bod X se svým průvodičem $\mathbf{x}$. Je tedy průvodní vektor $\mathbf{x}$ vektorovou funkcí proměnných u a v .

Tuto funkci můžeme zapsat ve tvaru

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v), y(u, v), z(u, v) \\ \text{stručně} \\ x = x(u, v) \end{array} \right\} \quad (9.3)$$

Parametrické křivky na ploše

Parametrické křivky na ploše zavedeme pomocí definice :

Je dán bod $X [c, d]$ pevně zvolený bod na ploše v oblasti Ω nad níž je pomocí vektorové funkce (9.3) definována regulární plocha κ . Potom množinu bodů $\tilde{X}$, které jsou na ploše κ popsány vektorovou rovnicí

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{x} = x(c, d) \\ \tilde{v} = x(c, v) \end{array} \right\} \quad (9.4)$$

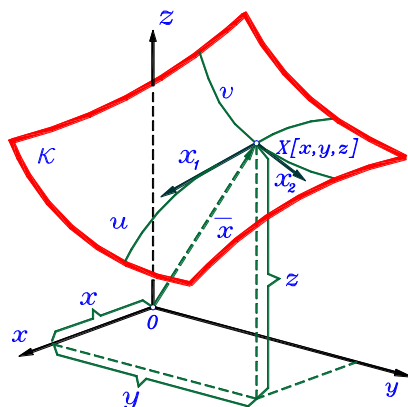
kde c, d jsou konstanty, mění se pouze parametry u a v , jsou **parametrické rovnice** křivek na ploše.

Z této definice plyne, že každým bodem na ploše prochází právě jedna křivka u a právě jedna křivka v .

Do bodu $X(c, d)$ umístíme počáteční body vektorů x_1 a x_2 , které budeme definovat

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{d\tilde{x}}{du} = \frac{\delta x}{\delta u} = \left(\frac{\delta x}{\delta u}, \frac{\delta y}{\delta u}, \frac{\delta z}{\delta u} \right), \\ x_2 &= \frac{d\tilde{x}}{dv} = \frac{\delta x}{\delta v} = \left(\frac{\delta x}{\delta v}, \frac{\delta y}{\delta v}, \frac{\delta z}{\delta v} \right). \end{aligned} \quad (9.5)$$

takto



Obr. 9.1

Potom dle vztahů (9.4), (9.5) plyne, že vektory x_1 a x_2 jsou tečnými vektory křivek u a v , které bodem X procházejí. (Obr. 9.1)

Explicitní a implicitní rovnice plochy

Parametrické vyjádření plochy je jeden způsob zadání plochy.

Dalším způsobem vyjádření plochy jsou tzv. explicitní a implicitní rovnice plochy.

Explicitní : Je dána funkce

$$z = f(x, y), \quad (9.6)$$

která je definována na nějaké oblasti Ω a která je ve všech bodech této oblasti spojitá i se svými parciálními derivacemi až do třetího řádu.

Potom množina všech bodů, které leží v prostoru E_3 a které můžeme zapsat ve tvaru $[x, y, f(x, y)]$, nazýváme **regulární plochou** danou **explicitně**.

Rovnice (9.6) je její **explicitní** rovnice.

Jestliže v rovnici (9.6) provedeme cyklickou záměnu proměnných, dostaneme opět regulární plochy dané explicitně. Jejich rovnice budou

$$x = f(y, z), \quad y = f(x, z). \quad (9.7)$$

Často je potřeba přejít od explicitního vyjádření plochy k parametrickému a naopak. Ne vždy lze vyhovět tomuto požadavku.

Z explicitního vyjádření lze přejít na parametrické na příklad takto:

$$\begin{aligned}x &= u, \\y &= v, \\z &= f(u, v), \quad \text{kde } [u, v] \in \Omega.\end{aligned}$$

Opačný postup nelze vždy provádět. Z parametrického vyjádření lze k explicitnímu přejít mnohdy pouze v dostatečně malém okolí zkoumaného bodu.

Implicitní vyjádření předpokládá, že je dána funkce

$$w = g(x, y, z), \quad (9.8)$$

která je definována na nějaké trojrozměrné oblasti $\Lambda \subset E_3$ a která je ve všech bodech této oblasti spojitá i se svými parciálními derivacemi až do třetího řádu. Nechť množina bodů $[x, y, z]$, které jsou v oblasti Λ určeny rovnicí

$$g(x, y, z) = 0,$$

je neprázdná, a nechť v žádném bodě této množiny nejsou všechny parciální derivace funkce (9.8) současně rovny nule. Potom tuto množinu nazýváme regulární plochou definovanou (vyjádřenou) **implicitně**.

Jestliže budeme uvažovat opět o vyjádření explicitním, potom i zde platí :

Jestliže je regulární plocha vyjádřena parametricky, explicitně nebo implicitně, potom můžeme v dostatečně malém okolí jejího bodu vyjádřit tuto plochu i zbývajícími dvěma způsoby.

Příklady zadání ploch.

Příklad 1.

Rovina α je určena bodem M a vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, které jsou nekolineární a leží v dané rovině.

Budeme hledat vyjádření pro obecný bod X zadané roviny α . (Obr. 9.2)

Nutnou a postačující podmínkou, aby vektor $\overline{MX}$ ležel v rovině α je aby byl lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Tedy musí existovat taková čísla u a v pro které platí :

$$\overline{MX} = u \mathbf{a} + v \mathbf{b}.$$

Označíme-li $\mathbf{m}$ průvodní vektor bodu M a $\mathbf{x}$ průvodní vektor bodu X roviny, můžeme psát:

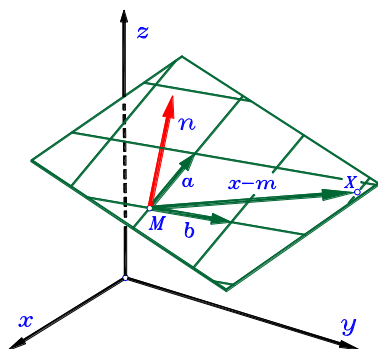
$$\overline{MX} = \mathbf{x} - \mathbf{m}.$$

Odtud a z předcházející rovnice plyne

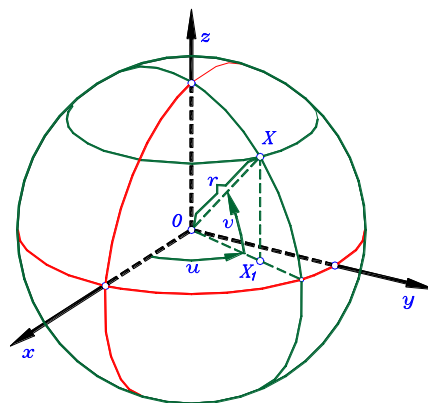
$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + u \mathbf{a} + v \mathbf{b} . \quad (9.9)$$

Tento vztah (9.9) budeme tedy považovat za vektorovou rovnici roviny α .

Dvojice u, v probíhá pro celou pomocnou rovinu ω . Lze ukázat, že parametrickými křivkami jsou rovnoběžky s vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.



Obr. 9.2



Obr. 9.3

Jestliže vektorovou rovnici (9.9) rozepíšeme do tří rovnic tak, že vektory v této rovnici postupně nahradíme jejich prvními, druhými resp. třetími souřadnicemi, získáme parametrické rovnice roviny α .

A to ve tvaru :

$$x = m_1 + u a_1 + v b_1$$

$$y = m_2 + u a_2 + v b_2$$

$$z = m_3 + u a_3 + v b_3$$

Příklad 2.

Určete rovnice kulové plochy se středem v počátku o poloměru r .

Z obrázku 9.3 je patrné, že obecný bod X bude určen "zeměpisnou délkou" u a "zeměpisnou šířkou" v . Pro tento bod potom platí

$$x = \overline{OX_1} \cdot \cos u, \quad y = \overline{OX_1} \cdot \sin u.$$

Odtud lze odvodit parametrické rovnice kulové plochy :

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos u \cdot \cos v \\ y &= r \cdot \sin u \cdot \cos v \\ z &= r \cdot \sin v \end{aligned}$$

kde předpokládáme, že $u \in [0, 2\pi]$ a $v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Parametrické v -křivky jsou rovnoběžkové kružnice, které leží v rovinách kolmých na souřadnicovou osu z . Parametrické u -křivky - poledníky leží ve svazku rovin procházející osou z .

Matice (9.2) má tvar

$$\begin{vmatrix} -r \cdot \sin u \cdot \cos v, & r \cdot \cos u \cdot \cos v, & 0 \\ -r \cdot \cos u \cdot \sin v, & -r \cdot \sin u \cdot \sin v, & r \cdot \cos v \end{vmatrix}$$

a hodnotu $h = 2$ pro všechny body s výjimkou bodů $[0, 0, r]$ a $[0, 0, -r]$, ve kterých pro $v = \pm \frac{\pi}{2}$ není hodnota matice 2. Body $[0, 0, r]$ a $[0, 0, -r]$ jsou tedy singulárními body. Tato singularita spočívá ve způsobu parametrizace kulové plochy, ne v samotné ploše.

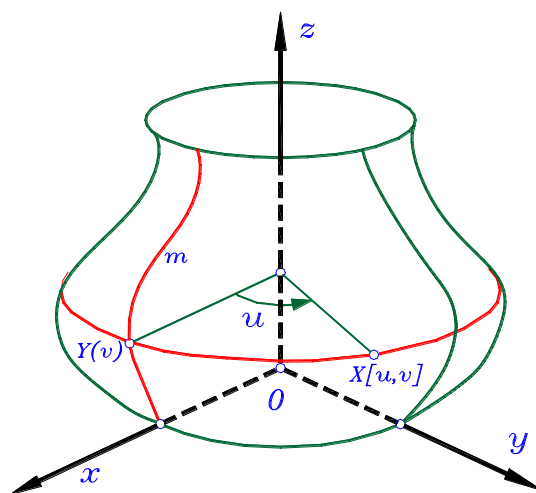
Příklad 3.

Rovnice rotační plochy.

Definice rotační plochy. Mějme libovolnou prostorovou křivku, kterou necháme rotovat okolo přímky. Takto vznikne rotační plocha. Zvolíme osu z za osu rotace. Plochu vytvoříme rotací křivky, která bude ležet v rovině procházející osou rotace. Bude tedy - tato křivka - meridiánem plochy. Každý bod křivky bude při rotaci tvořit rovnoběžkovou kružnici. Meridián m nechť leží v souřadnicové rovině xz a je určen parametrickými rovnicemi

$$y_1 = \varphi(v), y_2 = 0, y_3 = \psi(v), \quad (9.10)$$

kde parametr v probíhá interval (a, b) . Každý bod X rotační plochy je určen volbou parametru v a úhlu u o který je třeba otočit bod $Y = [\varphi(v), 0, \psi(v)]$ do polohy bodu $X[u, v]$. (Obr. 9.4)



Obr. 9.4

Vypočteme souřadnice bodu X a tak stanovíme následující parametrické rovnice rotační plochy ρ :

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(v) \cdot \cos u, \\ y &= \varphi(v) \cdot \sin u, \\ z &= \psi(v) \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

kde $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $v \in \langle a, b \rangle$.

Parametrickými v -křivkami jsou rovnoběžkové kružnice ležící v rovinách kolmých na osu rotace - tou je osa z . Parametrickými u -křivkami jsou meridiány, které leží ve svazku rovin o ose z . Parametrické rovnice (9.11) rotační plochy ρ můžeme nahradit jednou vektorovou rovnicí :

$$x = \varphi(v) \cdot \cos u, \quad y = \varphi(v) \cdot \sin u, \quad z = \psi(v).$$

Příklad 4.

Rovnice rotační kuželové plochy.

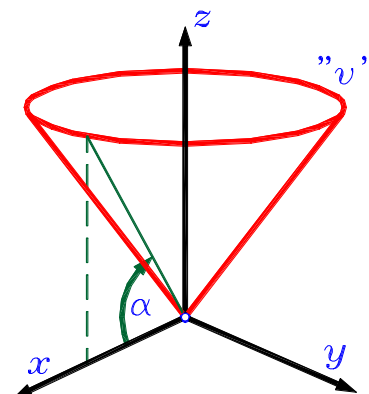
Kolem osy z necháme rotovat přímku danou parametrickými rovnicemi

$$x = v \cdot \cos \alpha, \quad y = 0, \quad z = v \cdot \sin \alpha$$

v nichž $\sin \alpha \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$. Vrchol kuželové plochy je v počátku souřadnic.

Použijeme rovnic (9.10) a (9.11) dostaneme parametrické rovnice této plochy.

$$\left. \begin{aligned} x &= v \cdot \cos u \cdot \cos \alpha, \\ y &= v \cdot \sin u \cdot \cos \alpha, \\ z &= v \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$



Obr. 9.5

Matice (9.2) má potom tvar

$$\begin{vmatrix} -v \cdot \sin u \cdot \cos \alpha & v \cdot \cos u \cdot \cos \alpha & 0 \\ \cos u \cdot \cos \alpha & \sin u \cdot \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

a hodnost $h = 2$ pro všechny body s výjimkou vrcholu kužele ($v = 0$), pro který je $h = 1$.

Vrchol je zde singulárním bodem.

Vyloučením parametrů u a v z rovnic (9.12) dostaneme implicitní rovnici plochy ve tvaru :

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{k^2} \cdot z^2 = 0, \quad \text{kde} \quad k = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Doporučené animace: 9a Plochy kulova, valcova, kuželova

9b Plochy sroubova, spadova.

9.2 Kontravariantní a kovariantní souřadnice vektoru

Mějme dány tři libovolné nekomplanární vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, které neleží v jedné rovině.

Považujeme tyto vektory za základní vektory prostorové soustavy.

Potom lze každý vektor $\mathbf{a}$ psát ve tvaru

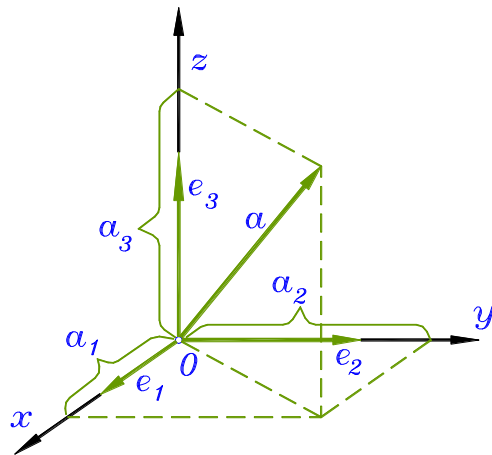
$$\mathbf{a} = a^1 \cdot \mathbf{e}_1 + a^2 \cdot \mathbf{e}_2 + a^3 \cdot \mathbf{e}_3,$$

kde a^1 , a^2 , a^3 jsou reálná čísla. (Obr. 9.6)

Tato čísla a^1 , a^2 , a^3 se nazývají **kontravariantní** souřadnice vektoru $\mathbf{a}$ v soustavě $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Obecně tedy můžeme psát

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_i \cdot a^i, \text{ což je } \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \cdot a^i.$$



Obr. 9.6

Jsou-li $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ jiné tři **nekomplanární** vektory v prostoru, potom

$$\mathbf{e}'_1 = e'_1{}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + e'_1{}^2 \cdot \mathbf{e}_2 + e'_1{}^3 \cdot \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}'_2 = e'_2{}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + e'_2{}^2 \cdot \mathbf{e}_2 + e'_2{}^3 \cdot \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}'_3 = e'_3{}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + e'_3{}^2 \cdot \mathbf{e}_2 + e'_3{}^3 \cdot \mathbf{e}_3$$

stručně

$$\mathbf{e}'_i = e'_i{}^j \cdot \mathbf{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Matice $\mathbf{A} = \|e'_i{}^j\|$ (horní index je sloupcový, dolní řádkový) se nazývá **matice přechodu** od soustavy souřadnic $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ k soustavě $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$.

Na základě této definice lze vyslovit věty:

V1.: Determinant $|e'_i{}^j|$ matice přechodu je různý od nuly, takže můžeme přejít od soustavy souřadnic čárkované k nečárkované:

$$\mathbf{e} = f_i{}^j \cdot \mathbf{e}'_j \quad \text{pro } (i, j = 1, 2, 3).$$

Přitom matice $\|f_i{}^j\|$ je inverzní k matici $\|e'_i{}^j\|$.

Kovariantní souřadnice vektoru

V rovině τ je dán vektor $\mathbf{a}$. Vypočteme skalární součin tohoto vektoru se souřadnicovými vektory $\mathbf{x}_i$ a označme je a_i .

Můžeme tedy napsat $a_i = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{a}$ a vyslovit definici:

Čísla a_1 a a_2 z předcházející rovnice nazýváme **kovariantními souřadnicemi** vektoru $\mathbf{a}$. Z obrázku 9.2 je patrný geometrický význam kovariantních souřadnic. Úhel, který svírá vektor $\mathbf{a}$ s vektorem $\mathbf{x}$ označíme φ .

Při konstrukci obrázku 9.2 je patrné, že

$$\frac{a_i}{|\mathbf{x}_i|} = \frac{|\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi}{|\mathbf{x}_i|} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi$$

Lze odvodit vztahy, kterými jsou vázány kovariantní a kontravariantní souřadnice vektoru.

9.3 Tenzory na ploše. Tenzor nultého řádu

Zavedeme číslo λ , které bude v tečné rovině plochy s místní soustavou souřadnic $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ určovat **tenzor nultého řádu**. Jestliže při přechodu od této soustavy souřadnic $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ k druhé soustavě souřadnic $[\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2]$, budeme toto číslo transponovat tak, aby platilo

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Pro vztah mezi soustavami souřadnic platí

$$\bar{\mathbf{x}}_j = \sum_{i=1}^2 \frac{\delta \bar{\mathbf{x}}^i}{\delta \mathbf{u}^j} \cdot \mathbf{x}_i \quad (j = 1, 2).$$

Tenzorem nultého řádu je "skalár". Na příklad: Označme P obsah čtverce v soustavě $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ a $\bar{P}$ obsah čtverce vypočtený pomocí soustavy $[\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2]$. Zřejmě $P = \bar{P}$.

Obsah čtverce je tedy **tenzorem nultého řádu**.

Nebo. Skalární součin dvou vektorů ležících v tečné rovině může být tenzorem nultého řádu. Neznamená to však, že nahradíme-li dva vektory jedné místní soustavy jinými vektory jiné místní soustavy, že úhly, které tyto dvojice vektorů (sobě odpovídající) svírají, budou stejné.

9.4 Křivka na ploše

Definice:

Nechť $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, pro $[u, v] \in \Omega$, je vektorová rovnice regulární plochy χ . (Obr. 9.7)

Mějme funkce

$$u = u(t) \quad \text{a} \quad v = v(t), \quad (9.14)$$

která mají tyto vlastnosti:

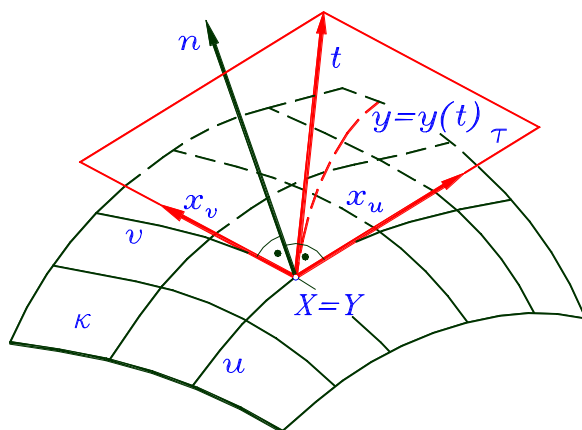
- Funkce (9.14) jsou reálné, funkce reálné proměnné t , definované na společném intervalu (a, b) .
- Ve všech bodech intervalu (a, b) jsou funkce (9.14) spojité i se svými derivacemi alespoň prvního řádu.
- V žádném bodě intervalu (a, b) nejsou funkce (9.14) současně rovny nule.
- Dvěma různým bodům z intervalu (a, b) přiřazují funkce (9.14) dva různé body oblasti Ω .

Jestliže jsou tyto předpoklady splněny, potom množiny všech bodů Y , které jsou dány vektorovou rovnicí

$$y = y(u(t), v(t)), \quad t \in (a, b) \quad (9.15)$$

se nazývá **křivka na ploše** χ .

Rovnice (9.14) jsou *vnitřními parametrickými rovnicemi* na ploše χ .



Obr. 9.7

Délka křivky na ploše

Mějme danou vektorovou rovnici regulární plochy χ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (10.1)$$

a

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (10.2)$$

budiž rovnice křivky k na ploše χ .

Vektorová rovnice této křivky k je tedy

$$\mathbf{y} = \mathbf{r}(u(t), v(t)).$$

Pomocí integrálního počtu (Lit. K.Havlíček: Integrální počet pro začátečníky) lze odvodit vztah pro délku křivky mezi dvěma body $Y(t_0)$ a $Y(t)$ je dána vzorcem

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2 + \dot{x}_3(t)^2} \cdot dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\mathbf{y}}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t)} \cdot dt. \quad (10.3)$$

9.5 Tečná rovina, normála plochy

Buď X libovolný bod (regulární) plochy χ . Každým bodem X plochy procházejí dvě křivky plochy u a v . Určíme tečny těchto křivek v bodě X .

Lze ukázat větu:

Všechny přímky procházející bodem X , jejichž vektor je lineární kombinací vektorů tečen křivek u a v , vyplňují tečnou rovinu, která se plochy dotýká v bodě X plochy χ .

Přímka, která bodem X prochází a je na tuto rovinu kolmá se nazývá *normála* plochy χ .

Jsou-li vektory $\mathbf{x}_u$ a $\mathbf{x}_v$ tečnými vektory, je normálový vektor *vektorovým* součinem těchto vektorů $\mathbf{x}_u$ a $\mathbf{x}_v$.

Tedy $\mathbf{n} = \mathbf{x}_u * \mathbf{x}_v$.

Vektorovou rovnici tečné roviny k ploše χ v bodě X potom můžeme psát ve tvaru:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{x}_u + \beta \cdot \mathbf{x}_v,$$

kde $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, a $\beta \in (-\infty, +\infty)$.

Vektorová rovnice příslušné normálové roviny je:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \gamma(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v),$$

kde $\gamma \in (-\infty, +\infty)$.

Vektory $\mathbf{n}$ sestrojené v každém bodě dané plochy lze napsat jako vektorovou funkci $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$. O této funkci budeme předpokládat, že je spojitá i se všemi svými derivacemi až do druhého řádu.

Dále lze definovat **tečné** plochy.

Jestliže dvě plochy mají v bodě X společnou tečnou rovinu, potom se tyto plochy v bodě X dotýkají - jsou **tečné** plochy.

Věty a definice (tečné roviny a normály plochy)

Z uvedené definice tečné roviny plochy má její vektorová rovnice tvar

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{x}_u + \beta \cdot \mathbf{x}_v, \quad (9.16)$$

kde $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, a $\beta \in (-\infty, +\infty)$.

Vektorová rovnice příslušné normálové roviny je

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \gamma(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v), \quad (9.17)$$

kde $\gamma \in (-\infty, +\infty)$.

Uvedeme další věty a tvary týkající se tečné roviny a normály plochy.

Věta 1. V regulárním bodě $[u_0, v_0]$ plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ existuje právě jedna tečná rovina a její rovnice v pravoúhlých souřadnicích X, Y, Z je

$$\left| \mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \right| = \begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)_0 & \left(\frac{\delta y}{\delta u}\right)_0 & \left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)_0 \\ \left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)_0 & \left(\frac{\delta y}{\delta v}\right)_0 & \left(\frac{\delta z}{\delta v}\right)_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X - x_0 & Y - y_0 & Z - z_0 \\ \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v & (z_u)_0 \\ \mathbf{r}_v & \mathbf{r}_u & (z_v)_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.18)$$

kde $\mathbf{R}$ je průvodič běžného bodu roviny, $\mathbf{r}_u = \left(\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta u}\right)_0$, $\mathbf{r}_v = \left(\frac{\delta \mathbf{r}}{\delta v}\right)_0$.

Vektory $\mathbf{r}_u = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta u}$, $\mathbf{r}_v = \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta v}$ jsou nekolineární, tj. lineárně nezávislé s počátečním

regulárním bodě plochy $[u, v]$ a jsou tečnými vektory souřadnicových křivek u a v .

Věta 2.

Tečná rovina v regulárním bodě $[x, y, z]$ plochy $z = z(x, y)$ má rovnici

$$(X - x) \cdot p + (Y - y) \cdot q - (Z - z) = 0, \quad (9.19)$$

kde $p = \frac{\delta z}{\delta x}$, $q = \frac{\delta z}{\delta y}$, X, Y, Z jsou souřadnice běžného bodu roviny.

Věta 3.

Tečná rovina v regulárním bodě $[x, y, z]$ plochy $F(x, y, z) = 0$ má rovnici

$$\frac{\delta F}{\delta x} \cdot (X - x) + \frac{\delta F}{\delta y} \cdot (Y - y) + \frac{\delta F}{\delta z} \cdot (Z - z) = 0, \quad (9.20)$$

kde X, Y, Z jsou souřadnice běžného bodu roviny.

Věta 4.

Pro jednotkový vektor $\mathbf{n}$ normály plochy $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ platí:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

kde

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\ F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \frac{\partial x \partial x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y \partial y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z \partial z}{\partial u \partial v} \\ G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \end{aligned} \quad (9.21)$$

Poznámka 1.

V obecném bodě plochy je vždy $\mu^2 = EG - F > 0$.

Výraz $D = \sqrt{EG - F^2} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \left[\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \right] > 0$

nazýváme **diskriminantem** plochy a je brán vždy kladně.

Je

$$D = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}. \quad (9.22)$$

Pro délku tečných vektorů potom platí:

$$|\mathbf{r}_u| = \sqrt{E}, \quad |\mathbf{r}_v| = \sqrt{G}.$$

Věta 5. Směrové kosiny n_x, n_y, n_z normály $\mathbf{n}$ plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ jsou dány výrazy

$$n_x = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{D}, \quad n_y = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}{D}, \quad n_z = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}{D}.$$

Věta 6. Směrové kosiny normály $\mathbf{n}$ plochy dané explicitně $z = f(x, y)$ jsou

$$n_x = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad n_y = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad (9.23)$$

$$\text{kde } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Věta 7. Směrové kosiny normály $\mathbf{n}$ plochy dané implicitně $f(x, y, z) = 0$ jsou dány výrazy

$$n_x = \frac{F_x}{J}, \quad n_y = \frac{F_y}{J}, \quad n_z = \frac{F_z}{J}, \quad (9.24)$$

kde $F_x = \frac{\delta F}{\delta x},$

$$F_y = \frac{\delta F}{\delta y},$$

$$F_z = \frac{\delta F}{\delta z}$$

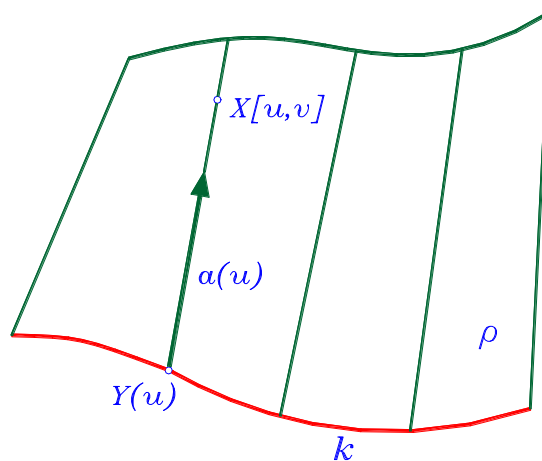
a $J = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$

9.6 Technické plochy

Příklad 5.

Rovnice přímkové plochy.

Mějme danou vektorovou rovnici $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u)$, kde $u \in (a, b)$, která zadává křivku k . Do každého bodu $Y(u)$ křivky k umístíme počátek nenulového vektoru $\mathbf{a}(u)$. (Obr. 9.8)



Obr. 9. 8

Tento vektor je dán vektorovou funkcí

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$$

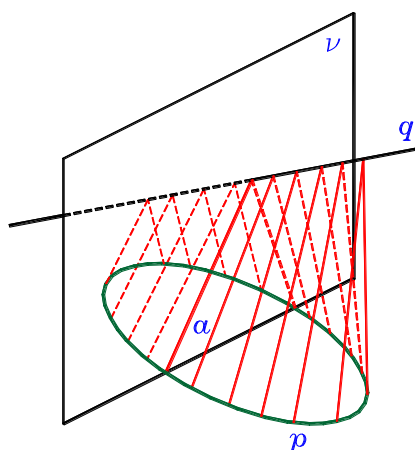
a je definována na intervalu (a,b) a že je na tomto intervalu spojitá i se svými derivacemi až do třetího řádu. Každým bodem $Y(u)$ křivky k a vektorem $\mathbf{a}(u)$ je určena přímka o vektorové rovnici

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(u) + v \cdot \mathbf{a}(u), \quad (9.13)$$

kde $v \in (-\infty, +\infty)$. Jestliže parametr u volíme průběžně v intervalu (a,b) , je rovnice (9.13) vektorovou rovnici přímkové plochy. Parametrickou v -křivkou pro $v = 0$ je křivka k . Parametrickými u -křivkami jsou povrchové přímky plochy.

Konoidy

V praxi je časté zadání přímkových ploch pomocí roviny a dvou prostorových křivek. Křivky jsou (většinou) rovinné, ale jejich roviny nejsou totožné a jsou s danou řídící rovinou různoběžné. Přímky, které tvoří konoid protínají obě řídící křivky a jsou s danou řídící rovinou rovnoběžné. Obr. 9.9.



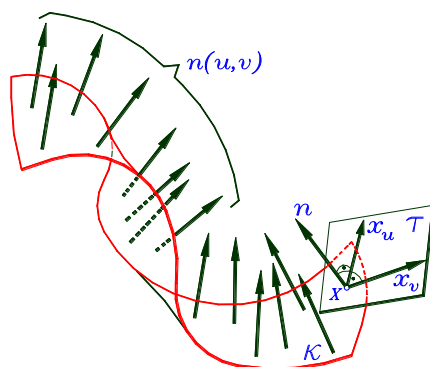
Obr. 9.9

Obálka jednoparametrické soustavy ploch

Předpokládejme, že máme rovnici

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \text{pro } \alpha \in (a, b) \quad (9.25)$$

pro každé dané - pevné α danou regulární plochu. Jestliže funkce $f(x, y, z, \alpha) = 0$ má pro každé $\alpha \in (a, b)$ spojitě parciální derivace podle proměnné α až do druhého řádu, potom množinu všech ploch určených vztahem (9.25) nazýváme **jednoparametrickou soustavou ploch**. (Obr. 9.10)



Obr. 9.10

Plochu χ nazýváme **obálkou** jednoparametrické soustavy (9.25), jestliže jsou splněny tyto podmínky:

- Plocha χ se v každém svém bodě dotýká právě jedné soustavy (9.25).
- Každá plocha soustavy (9.25) se dotýká plochy χ .
- Neexistuje plocha, která by byla současně částí plochy χ a některé plochy ze soustavy (9.27).

Poznámka. Existují jednoparametrické soustavy, které **nemají** obálky. Na příklad - svazek rovin.

Platí věta, podle níž budeme řešit jednoparametrické soustavy:

Nechť rovnice (9.25) je rovnicí jednoparametrické soustavy ploch a existuje plocha χ , která je obálkou této soustavy. Potom ke každému bodu $[x, y, z, \alpha]$ plochy χ lze najít právě jedno číslo α tak, že čísla x, y, z a α jsou řešením soustavy rovnic:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0. \quad (9.26)$$

Symbolem f_α je označena parciální derivace funkce f podle proměnné α .

Příklad 1.

Rovnicí $x + \alpha \cdot y = 0$, kde $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, je určena jednoparametrická soustava ploch. Jde o svazek rovin jehož osou je osa z . Dle (9.26) rovnice obálky mají tvar:

$$x + \alpha \cdot y = 0, \quad y = 0.$$

Pro libovolné α je tedy určena přímka - a to osa z . Obálka tedy neexistuje.

Příklad 2.

Mějme rovnici $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = \frac{\alpha^2}{2}$,

která určuje jednoparametrickou soustavu kulových ploch.

Budeme derivovat obě strany této rovnice podle α . Dostaneme rovnici

$$-2 \cdot (z - \alpha) = \alpha.$$

Vyloučením α z obou rovnic, dostaneme rovnici obálky:

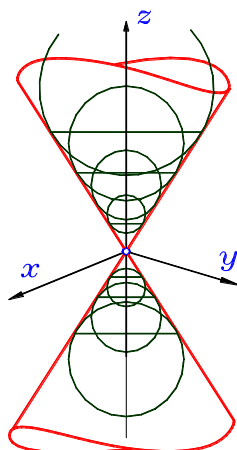
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

což je rovnice kuželové plochy.

Příklad 3.

Mějme rovnici $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2 \cdot \alpha$, která určuje jednoparametrickou soustavu kulových ploch.

Kulové plochy mají střed na ose z a poloměr r je funkcí parametru α . (Obr. 9.11)



Obr. 9.11

Postup bude stejný, jako u předcházejících příkladů. Vyloučením α z obou rovnic, dostaneme rovnici obálky:

$$x^2 + y^2 = 2z,$$

což je rovnice rotačního paraboloidu s osou z , vzniklého rotací paraboly $2z = x^2$ kolem osy z .

Rozvinutelné plochy

Regulární plocha, která je obálkou jednoparametrické soustavy rovin, se nazývá *rozvinutelná plocha*.

Pro objasnění *některých* vlastností rozvinutelných ploch provedeme následující konstrukci.

Předpokládejme, že plocha κ je obálkou jednoparametrické soustavy Λ rovin je tedy *rozvinutelnou plochou*.

Tuto rovnici soustavy rovin zapíšeme ve tvaru:

$$n_1(\alpha)x_1 + n_2(\alpha)x_2 + n_3(\alpha)x_3 + a(\alpha) = 0, \quad (9.27)$$

kde $\alpha \in J$ (J je otevřený interval), tak, aby pro každé $\alpha \in J$ byl vektor $\mathbf{n}(\alpha) = (n_1(\alpha), n_2(\alpha), n_3(\alpha))$ jednotkovým vektorem. Při dodatečném předpokladu, že pro každé $\alpha \in J$ je vektor $\dot{\mathbf{n}}(\alpha)$ nenulovým vektorem.

Obálka vyhovuje rovnicím

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1(\alpha)x_1 + \mathbf{n}_2(\alpha)x_2 + \mathbf{n}_3(\alpha)x_3 + \mathbf{a}(\alpha) &= 0, \\ \dot{\mathbf{n}}_1(\alpha)x_1 + \dot{\mathbf{n}}_2(\alpha)x_2 + \dot{\mathbf{n}}_3(\alpha)x_3 + \dot{\mathbf{a}}(\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Označme η množinu všech bodů, které vyhovují soustavě (9.28). Plocha κ je zřejmě buď totožná s množinou η nebo je její částí. Nejprve ukážeme konstrukci množiny η , a posléze provedeme konstrukci plochy κ .

Derivujme nejprve obě strany identity $\mathbf{n}(\alpha) \cdot \mathbf{n}(\alpha) = 1$.

Dostaneme tak vztah $2\dot{\mathbf{n}}(\alpha) \cdot \mathbf{n}(\alpha) = 0$, z čehož vyplývá, že pro každé $\alpha \in J$ jsou vektory $\mathbf{n}(\alpha)$ a $\dot{\mathbf{n}}(\alpha)$ na sebe kolmé. Dvojice rovin určené rovnicemi (9.28) jsou vždy různoběžné.

Množina η se skládá ze všech přímek, které jsou jejich průsečnicemi.

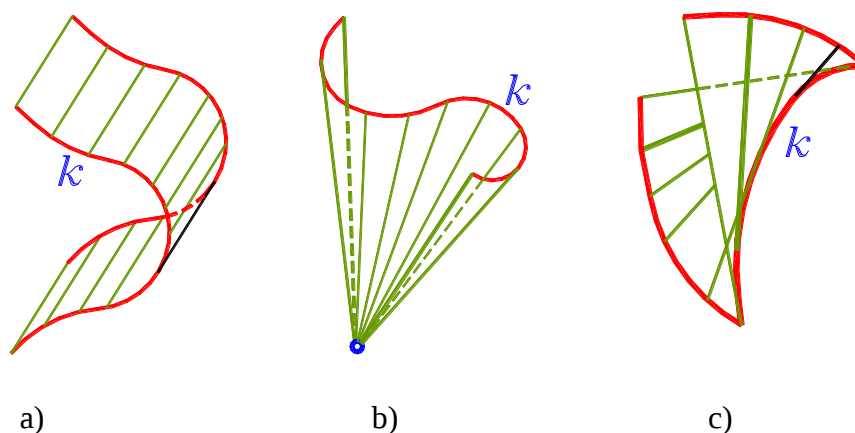
Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1(\alpha)x_1 + \mathbf{n}_2(\alpha)x_2 + \mathbf{n}_3(\alpha)x_3 + \mathbf{a}(\alpha) &= 0, \\ \dot{\mathbf{n}}_1(\alpha)x_1 + \dot{\mathbf{n}}_2(\alpha)x_2 + \dot{\mathbf{n}}_3(\alpha)x_3 + \dot{\mathbf{a}}(\alpha) &= 0, \\ \ddot{\mathbf{n}}_1(\alpha)x_1 + \ddot{\mathbf{n}}_2(\alpha)x_2 + \ddot{\mathbf{n}}_3(\alpha)x_3 + \ddot{\mathbf{a}}(\alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (9.29)$$

a zkoumejme, jak s tímto řešením souvisí množina η . V zájmu zjednodušení předpokládejme dodatečně, že funkce $\mathbf{n}_1(\alpha)$, $\mathbf{n}_2(\alpha)$, $\mathbf{n}_3(\alpha)$ a $\mathbf{a}(\alpha)$ jsou v rovnici (9.27) zvoleny tak, že při řešení soustavy (9.29) mohou nastat tyto případy:

1. Pro každé α je determinant soustavy (9.29) roven nule. Válcová plocha. (Obr. 9.12 a)
2. Pro každé α je determinant soustavy různý od nuly. Řešením soustavy (9.29) pro všechna $\alpha \in J$ je jediný bod V . Kuželová plocha. (Obr. 9.12b)

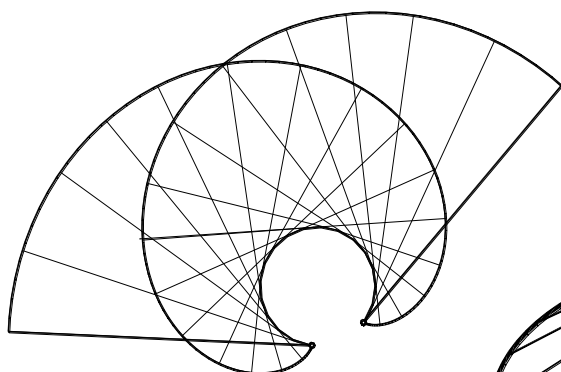
3. Pro každé α je determinant soustavy různý od nuly. Řešením soustavy (9.29) jsou tři funkce $x_1 = x_1(\alpha)$, $x_2 = x_2(\alpha)$, $x_3 = x_3(\alpha)$, které jsou parametrickými rovnicemi křivky. Plocha,



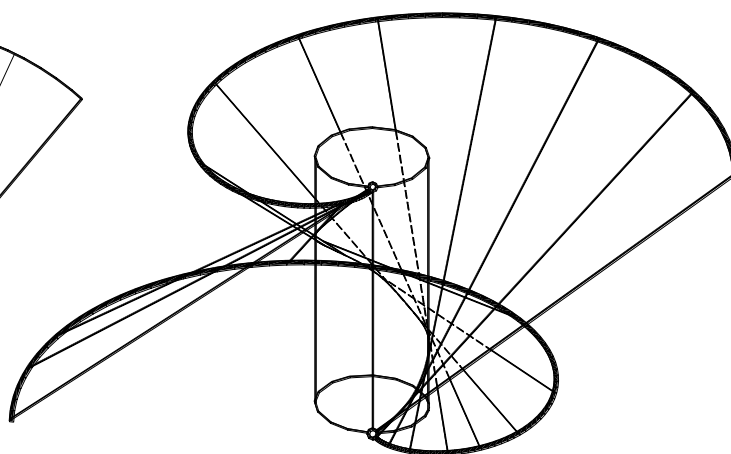
Obr. 9.12

která je částí plochy tečen regulární prostorové křivky (Obr. 9.12c).

Na následujících obrázcích 9.13. a 9.14. je zobrazena rozvinutelná šroubová plocha, která je tvořena tečnami šroubovice. Tvořící šroubovice je hranou vratu plochy.



Obr. 9.13



Obr. 9.14

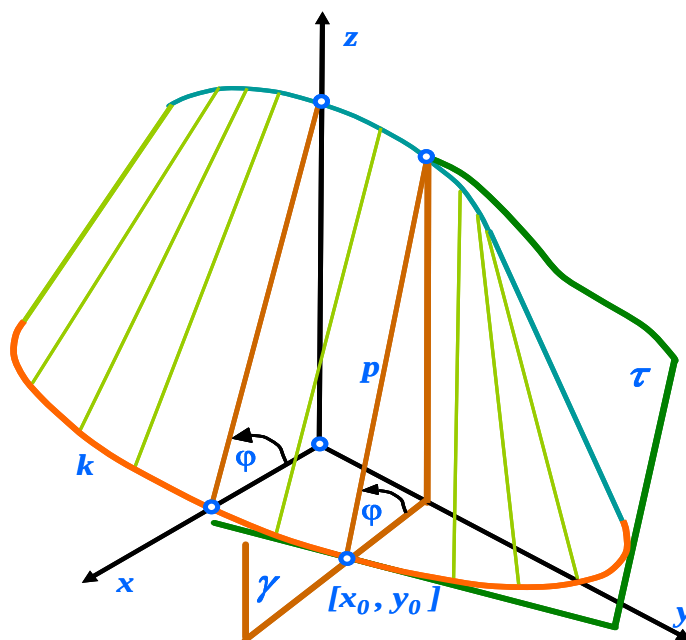
Spádové plochy

Jde o přímkové, rozvinutelné plochy tvořené pohybem přímky, která protíná řídící křivku k a s danou rovinou (xy) svírá konstantní úhel φ .

Aplikace: Stavebně inženýrské práce, geografické práce.

Lze tyto plochy definovat jako obalové plochy rotačních kuželových ploch, jejichž vrcholy leží na dané - řídící - křivce.

Na obrázku 9.15 je znázorněna plocha tvořená přímkami p procházející křivkou k .



Obr. 9.15

Přímky p svírají s rovinou (xy) konstantní úhel φ .



Kontrolní otázky 9.

1. Definice křivky na ploše.
2. Tečná rovina. Normála plochy.
3. Obálka jednoparametrické soustavy ploch.
4. Rozvinutelné plochy.
5. Spádové plochy.
6. Způsoby zadání a rovnice plochy.
7. Typy ploch.
8. Parametrické křivky na ploše.

10. PRVNÍ A DRUHÁ FORMA PLOCHY



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete

- znát pojem první a druhé základní formy plochy
- umět určit křivost plochy



Výklad

První základní forma plochy

Čtverec diferenciálu oblouku křivky $u = u(t)$, $v = v(t)$ na ploše $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ je dán vzorcem

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = I. \quad (10.1)$$

Tato kvadratická diferenciální forma (10.1) se nazývá **první** (metrická) **základní forma plochy**.

ds ... se nazývá **lineární element** (prvek, element oblouku) na ploše.

E, F, G ... se nazývají tzv. (Gaussovy) **základní veličiny plochy 1. řádu**.

Věta 8.

Pro úhel φ křivek $u = u(t)$, $v = v(t)$ a $\bar{u} = \bar{u}(t)$, $\bar{v} = \bar{v}(t)$ plochy $r = r(u, v)$, jdoucím jejím obecným bodem, platí

$$\cos \varphi = \frac{E\dot{u}\bar{u} + F(\dot{u}\bar{v} + \dot{\bar{u}}v) + G\dot{v}\bar{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} \cdot \sqrt{E\bar{u}^2 + 2F\bar{u}\bar{v} + G\bar{v}^2}} \quad (10.2)$$

Věta 9.

Pro úhel parametrické v -křivky s parametrickou u -křivkou (v tomto pořadí) v bodě plochy platí:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \varphi = \frac{D}{\sqrt{EG}}, \quad (D = \sqrt{EG - F^2}) \quad (10.3)$$

Příklad 1.

Pro kulovou plochu danou parametricky

$$x = r \cdot \sin u \cdot \cos v, \quad y = r \cdot \sin u \cdot \sin v, \quad z = r \cdot \cos u$$

určíme:

Podle (10.3) E, F, G , a to $E = r^2, F = 0, G = r^2 \sin^2 u$.

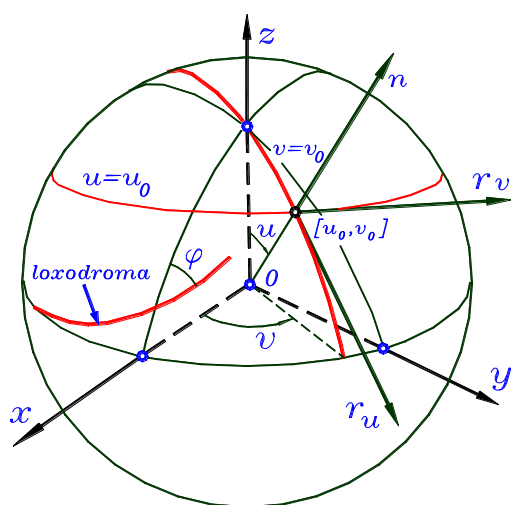
Metrická forma (první základní forma plochy) bude mít tvar $ds^2 = r^2 (du^2 + \sin^2 u dv^2)$, který platí pro element oblouku každé křivky na kulové ploše.

Křivku, která svírá s poledníky na kulové ploše konstantní úhel φ , kde $\varphi \in (0 < \varphi < \pi/2)$ se nazývá **loxodroma**.

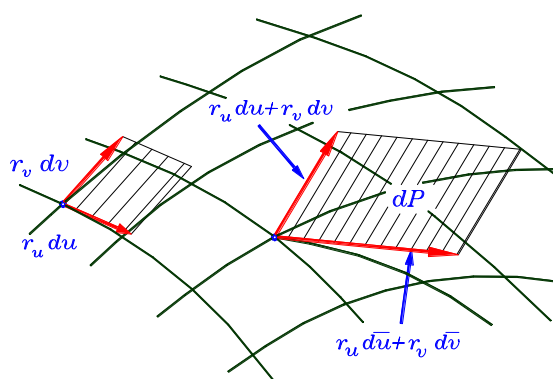
Rovnice loxodromy v křivočarých souřadnicích je

$$v + \operatorname{tg} \varphi \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} = c$$

kde c je reálná konstanta.



Obr. 10.1



Obr. 10.2

Věta 10.

Obsah rovnoběžníka, jehož dvě sousední strany jsou tečné vektory plochy je (Obr. 10.2.)

$$dP = D \begin{vmatrix} du & dv \\ d\bar{u} & d\bar{v} \end{vmatrix} \quad (10.4)$$

Tento výraz (10.4) nazýváme **plošným elementem** (prvkem) plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.

Poznámka 2.

Při zadání plochy $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ část této plochy nad oborem Ω lze vyjádřit:

$$P = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \cdot du dv \quad (10.5)$$

Poznámka 3.

Pro plochu $z = z(x, y)$ dostaneme základní veličiny 1. řádu ve tvaru

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \quad F = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2,$$

diskriminant

$$D = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2},$$

pro plošný element výraz

$$dP = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \cdot dx dy = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot dx dy.$$

Pro diferenciál ds oblouku křivky na ploše $z = f(x, y)$ platí:

$$ds = \sqrt{(1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2}.$$

Druhá základní forma plochy

Druhá základní forma plochy určuje její tvar vzhledem k tečné rovině plochy.

Věta 11.

Pro křivku $u = u(s)$, $v = v(s)$, (s je její oblouk) na ploše $r = r(u, v)$ platí

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n} = L \cdot du^2 + 2M \cdot dudv + N \cdot dv^2 \equiv II \quad (10.6)$$

$$\text{kde} \quad L = -\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v, \quad 2M = -(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n}_v + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_u), \quad N = -\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}_v \quad (10.7)$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{n}_u = \frac{\delta \mathbf{n}}{\delta u}, \quad \mathbf{n}_v = \frac{\delta \mathbf{n}}{\delta v}, \quad \mathbf{n} \text{ je jednotkový vektor normály plochy}$$

Forma (10.6) se nazývá **druhá základní forma plochy**. Veličiny L, M, N dané vztahy (10.7) se nazývají **základními veličinami 2.řádu plochy**.

Věta 12.

Platí

$$L = \frac{\mathbf{r}_{uu} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\mathbf{r}_{uv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\mathbf{r}_{vv} \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

kde

$$\mathbf{r}_{uu} = \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta u^2}, \quad \mathbf{r}_{uv} = \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta u \delta v}, \quad \mathbf{r}_{vv} = \frac{\delta^2 \mathbf{r}}{\delta v^2}$$

Věta 13.

Pro plochu danou rovnicí $z = f(x, y)$ je

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

kde

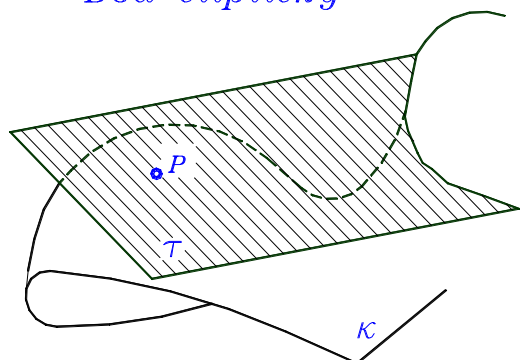
$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Definice bodů na ploše

Regulární bod plochy, kde platí

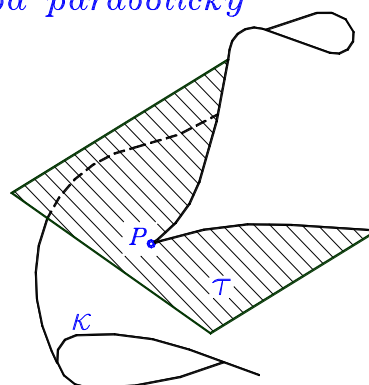
je bod $LN - M^2 > 0$ resp. $LN - M^2 = 0$ resp. $LN - M^2 < 0$
eliptický parabolický hyperbolický

Bod eliptický

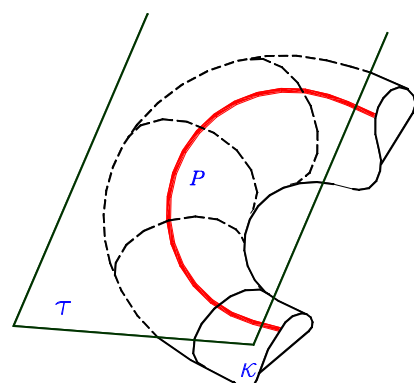


Obr. 10.3

Bod parabolický



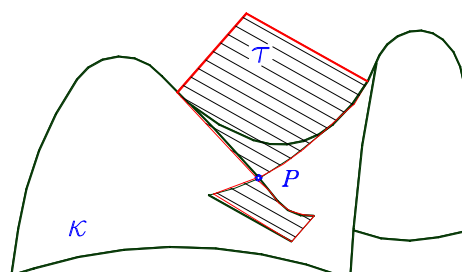
Obr. 10.4



P ... parabolické body

Obr. 10.5

Bod hyperbolický



Obr. 10.6

Na obrázcích 10.3, 10.4, 10.5 a 10.6 jsou znázorněny příslušné body na plochách.

Věta 14.

V dostatečně malém okolí regulárního bodu P , který je bodem eliptickým resp. hyperbolickým, je plocha na téže straně, resp. na obou stranách tečné roviny τ v bodě P .

Tečná rovina τ v eliptickém resp. parabolickém resp. hyperbolickém bodě P plochy, protíná plochu v křivce, která má bod P za bod dvojnásobný s tečnami komplexně sdruženými, resp. reálnými splývajícími, resp. reálnými různými. (Viz obr. 10.3 - obr. 10.6)

Křivost ploch

Věta 15.

Všechny křivky plochy, procházející týmž regulárním bodem P plochy a mající v P touž oskulační rovinu, mají v P také touž první křivost.

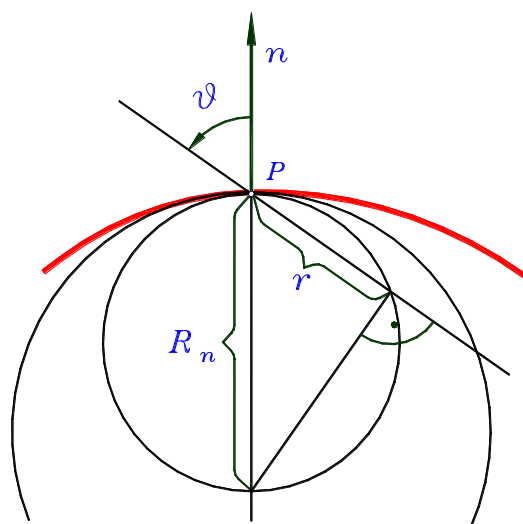
Pro rovinný řez na ploše, procházející jejím bodem P , platí

$$r = \frac{E \cdot du^2 + 2F \cdot dudv + G \cdot dv^2}{\left| L \cdot du^2 + 2M \cdot dudv + N \cdot dv^2 \right|} \cdot \cos \nu \quad (10.8)$$

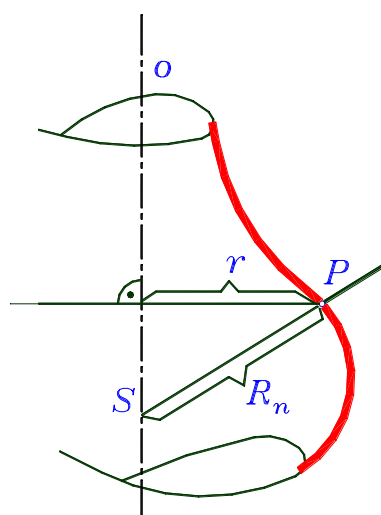
kde r je poloměr křivosti křivky v bodě P plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$,

ν je úhel, který svírá rovina křivky s normálou plochy v P .

Vzorec (10.8) platí i pro prostorové křivky. Potom jde o oskulační rovinu křivky.



Obr. 10.7



Obr. 10.8

Věta 16.

Rovinný řez, jdoucí na ploše regulárním bodem P , má v P poloměr křivosti r , jehož úsečka je pravouhlým průmětem úsečky poloměru křivosti R_n normálového řezu majícího s daným rovinným řezem ve společném bodě P touž tečnu platí:

$$r = R_n \cdot \cos \nu.$$

Z uvedené věty lze odvodit:

Pro normální křivost $1/R$ v daném směru v bodě P plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ platí

$$\frac{1}{R} = \frac{L \cdot du^2 + 2M \cdot du dv + N \cdot dv^2}{E \cdot du^2 + 2F \cdot du dv + G \cdot dv^2} = \frac{\varepsilon}{R_n}, \quad (\varepsilon = \pm 1); \quad (10.9)$$

jestliže je plocha zadána explicitně $z = f(x, y)$, potom pro poloměr křivosti normálového řezu v bodě plochy platí:

$$\varepsilon \cdot R_n = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{f_{xx} \cos^2 \alpha + 2f_{xy} \cos \alpha \cos \beta + f_{yy} \cos^2 \beta}, \quad (10.10)$$

kde α, β jsou tečny normálového řezu ve zkoumaném bodě plochy s osou y .



Kontrolní otázky 10.

1. Délka křivky na ploše.
2. Tečná rovina plochy.
3. První a druhá základní forma plochy.
4. Křivost plochy v regulárním bodě plochy.